1. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

2. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+b-3=0$이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=1, b=2$ ② $a=0, b=3$ ③ $a=-1, b=2$
④ $a=0, b=2$ ⑤ $a=-1, b=3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.
$D'=(k-a)^2-(k^2+b-3)=0$
$\Rightarrow \quad -2ak+a^2-b+3=0$
모든 k 에 대해 성립하려면
$-2a=0,\ a^2-b+3=0$
$\therefore \quad a=0, b=3$

3. x에 대한 부등식 $ax+b \le bx+a$에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단 a, b는 실수)

① $a > b > 0$일 때, 해는 $x \ge 1$이다.

② $a < b < 0$일 때, 해는 없다.

③ $a = b$ 일 때, 해는 모든 실수이다.

④ $a = b$ 일 때, 해는 없다.

⑤ $a = b$ 일 때, 해는 $x > 1$ 이다.

해설

$ax+b \le bx+a$ 에서 $(a-b)x \le a-b$

(i) $a > b$일 때, $a-b > 0$이므로 $x \le \dfrac{a-b}{a-b}$

$\therefore x \le 1$

(ii) $a = b$ 일 때, $a-b = 0$이므로 $0 \cdot x \le 0$

$\therefore$ 해가 무수히 많다

(iii) $a < b$일 때, $a-b < 0$이므로 $x \ge \dfrac{a-b}{a-b}$

$\therefore x \ge 1$

(i), (ii), (iii) 에서 해는 모든 실수

4. 부등식 $3x+2 \geq 8$을 풀면?

① $x \geq -2$ ② $x \geq -1$ ③ $x \geq -\frac{1}{2}$
④ $x \geq \frac{3}{2}$ ⑤ $x \geq 2$

해설

$3x+2 \geq 8,\ 3x \geq 6\ \therefore x \geq 2$

5. 방정식 $(x-1)^2+|x-1|-6=0$의 두 근의 합은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

(ⅰ) $x \geq 1$일 때
$x^2-2x+1+x-1-6=0$
$x^2-x-6=0$, $(x-3)(x+2)=0$이므로
$x=-2$, $x=3$
그런데 $x \geq 1$이므로 $x=3$
(ⅱ) $x<1$일 때
$x^2-2x+1-x+1-6=0$
$x^2-3x-4=0$, $(x-4)(x+1)=0$
$x=-1$, $x=4$
그런데 $x<1$이므로 $x=-1$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3, -1$이므로
두 근의 합은 2

6. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0$$

① $0, \ \pm 1$　② $0, \ \pm 2$　③ $\pm 1, \ \pm 2$

④ $\pm 2, \ \pm 3$　⑤ $\pm 3, \ \pm 4$

해설

(ⅰ) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$에서
$x \geq 0$일 때,
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x-2)(x-3) = 0$
$\therefore x = 2$, 또는 $x = 3$
(ⅱ) $x < 0$일 때,
$x^2 + 5x + 6 = 0$
$(x+2)(x+3) = 0$
$\therefore x = -2$, 또는 $x = -3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = \pm 2, \ x = \pm 3$

7. $xy=2$, $xz=4$, $yz=8$ 일 때, $x+y+z$의 값을 구하여라. (단, $x>0$, $y>0$, $z>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

세 식을 곱하면 $x^2y^2z^2=64$이므로 $xyz=8$
$xy=2$에서 $z=4$
$xz=4$에서 $y=2$
$yz=8$에서 $x=1$
$\therefore x+y+z=1+2+4=7$

8. 대각선의 길이가 $\sqrt{34}\,\mathrm{m}$ 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 가로, 세로의 길이를 각각 $2\,\mathrm{m}$ 씩 늘였더니, 넓이가 $20\,\mathrm{m}^2$ 만큼 넓어졌다고 한다. 처음 땅의 가로, 세로의 길이를 구하면?

① 가로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 :$5\,\mathrm{m}$

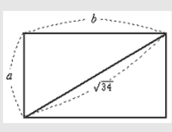
② 가로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 :$3\,\mathrm{m}$

③ 가로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 :$5\,\mathrm{m}$ 또는 가로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 :$3\,\mathrm{m}$

④ 가로의 길이 : $(3\sqrt{6}-2)\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 :$(3\sqrt{6}-2)\,\mathrm{m}$

⑤ 가로의 길이 : $\sqrt{3}\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $\sqrt{5}\,\mathrm{m}$

해설



$a^2+b^2=(\sqrt{34})^2=34$

$(a+2)(b+2)=ab+20$

$ab+2(a+b)+4=ab+20$

$\therefore\ a+b=8$

$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=64-34=30$

$\therefore\ ab=15\ b=8-a$

$a\cdot(8-a)=15\ \rightarrow\ (a-5)(a-3)=0$

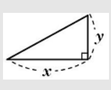
$\therefore\ a=3, b=5$ 또는 $a=5, b=3$

9. 직각 삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 21 cm 이고, 빗변의 길이가 15 cm 일 때, 직각을 낀 두 변의 길이 중 긴 변의 길이를 구하시오.

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 12 cm

해설



직각을 낀 두 변의 길이를 x, y 라 하면

$$\begin{cases} x + y = 21 \cdots ① \\ x^2 + y^2 = 15^2 \cdots ② \end{cases}$$ 이다.

①에서 $y = 21 - x$ 를 ②에 대입하면

$x^2 + (21 - x)^2 = 15^2$

$x^2 + 21^2 - 42x + x^2 = 15^2$

$2x^2 - 42x + 21^2 - 15^2 = 0$

$2x^2 - 42x + (21 + 15)(21 - 15) = 0$

$x^2 - 21x + 3 \times 36 = 0$

$(x - 12)(x - 9) = 0$,

$x = 12$ 또는 $x = 9$

$x = 12$ 일 때 $y = 9$

$x = 9$ 일 때 $y = 12$

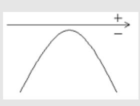
따라서 긴 변의 길이는 12 cm 이다.

10. 이차부등식 $(k-1)x^2-2x+k+1<0$이 모든 실수 x에 대해서 성립할 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$　② $k>\sqrt{2}$　③ $k<-\sqrt{2}$
④ $-\sqrt{2}<k<1$　⑤ $1<k<\sqrt{2}$

해설

$(k-1)x^2-2x+(k+1)<0$



ⅰ) 위로 볼록이어야 하므로 $k<1$

ⅱ) x축과 만나지 않아야 하므로 $\frac{D}{4}<0$

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(k-1)(k+1)<0$

$2-k^2<0$, $k^2>2$

$\therefore\ k<-\sqrt{2}$, $k>\sqrt{2}$

ⅰ), ⅱ) 모두 만족하는 범위는 $k<-\sqrt{2}$

11. 다음 <보기> 중 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $x^2 > -1$	㉡ $2\ (x-1)^2 \geq 0$
㉢ $(x+2)^2 + 1 > 0$	㉣ $x^2 - 4x + 1 > 0$

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉢　③ ㉢, ㉣
④ ㉠, ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $x^2 \geq 0$이므로 $x^2 > -1$
㉡ $(x-1)^2$은 완전제곱식이므로
$(x-1)^2 \geq 0$이다.
㉢ $(x+2)^2 \geq 0$이므로 $(x+2)^2 + 1 > 0$이다.
㉣ $x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$이므로
항상 0보다 크다고 할 수 없다.

12. $f(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{30}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

$\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{2i}{2} = i$, $\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{-2i}{2} = -i$

$f(i) = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{30} = (-i)^{30} = (i^4)^7 i^2$

$= -1 f(-i) = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{30} = i^{30}$

$= (i^4)^7 i^2 = -1$

$\therefore f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right) + f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)$

$= f(i) + f(-i) = -1 - 1 = -2$

13. 자연수 n에 대하여 $1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$ 의 값을 모두 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $1-i$

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{1}{i}=-i,\ \left(\frac{1}{i}\right)^3=i$

i) $n=2k$일 때,

$1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$

$=1-i+i-i+\cdots+i=1$

ii) $n=2k-1$일 때

$1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$

$=1-i+i-i+\cdots-i$

$=1-i$

14. $x,\ y$ 에 대한 이차식 $f(x,\ y) = x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3$ 이 $x,\ y$ 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

① -3　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면 근의 공식에 의하여

$x = -(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - (y^2 + ky - 3)}$

$\quad = -(y-1) \pm \sqrt{-(2+k)y + 4}$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이면

$x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$ 이고

준식이 $x,\ y$ 의 일차식으로 인수분해되므로

x 의 두 근 ㉠에서 $-(2+k)y + 4$가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.

따라서 근호 안의 판별식 D 는 0 이어야 한다.

$\therefore\ D = (2+k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$

$2 + k = 0$

$\therefore\ k = -2$

15. x, y 에 대한 이차식 $2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$ 가 x, y 에 대한 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k 의 값은 ?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

$2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$를 x 에 대해 정리하면
$2x^2 + (y-1)x - y^2 + 2y + k$
이 식이 일차식의 곱으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.
$D = (y-1)^2 - 4x2(-y^2 + 2y + k)$
$\quad = 9y^2 - 18y - 8k + 1$
이 식이 완전제곱식이므로
$\dfrac{D'}{4} = 9^2 + 9(-8k + 1)$
$\therefore k = -1$

해설

일차식의 곱으로 이루어져있으므로, 이차항을 이용하여
$(2x - y + a)(x + y + b)$ 로 나타낼 수 있다.
전개하면, $2x^2 + xy - y^2 + (a + 2b)x + (a - b)y + ab$ 이고
문제에 주어진 식과 같아야 되므로,

$$\begin{array}{rr} & a+2b=-1 \\ -) & a-\ \ b=2 \\ \hline & 3b=-3 \end{array}$$

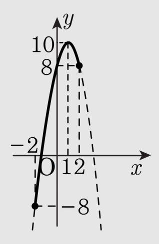
$\therefore a = 1, \quad b = -1$
$\therefore k = ab = -1$

16. $2x^2 + y^2 = 8$ 을 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $4x + y^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$2x^2 + y^2 = 8$ 에서
$y^2 = 8 - 2x^2$ 으로 놓으면
$y^2 = 8 - 2x^2 \geq 0, x^2 - 4 \leq 0$
$\therefore -2 \leq x \leq 2$
이 때, $y^2 = 8 - 2x^2$ 을 $4x + y^2$ 에 대입하면
$4x + y^2 = 4x + (8 - 2x^2)^2 = -2(x-1)^2 + 10$
여기서 $f(x) = 4x + y^2 = -2(x-1)^2 + 10$
이라고 하면 $-2 \leq x \leq 2$ 이므로
다음 그림에서 $x = 1$ 일 때
$f(x)$ 의 최댓값은 10
$x = -2$ 일 때 $f(x)$ 의 최솟값은 $-2(-2-1)^2 + 10 = -8$



따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + (-8) = 2$

17. $x^2 + y^2 = 4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2y + x^2$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^2 + y^2 = 4$에서 $x^2 = 4 - y^2$
x, y가 실수이므로
$x^2 = 4 - y^2 \geq 0,\ y^2 \leq 4$
$\therefore -2 \leq y \leq 2$
$2y + x^2$ 에 $x^2 = 4 - y^2$을 대입하면
$2y + x^2 = 2y + (4 - y^2)$
$= -y^2 + 2y + 4 = -(y-1)^2 + 5$
이 때, $-2 \leq y \leq 2$이므로 $y = 1$일 때
최댓값은 5, $y = -2$일 때 최솟값은 -4이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $5 + (-4) = 1$

18. x에 대한 이차부등식 $x^2-10x-24\ge 0$, $(x+1)(x-a^2+a)\le 0$을 동시에 만족하는 x의 값의 존재하지 않도록 상수 a의 값의 범위는?

① $-3<a<12$ ② $-3<a<8$ ③ $-3<a<4$
④ $-2<a<12$ ⑤ $-2<a<3$

해설

$$\begin{cases} x^2-10x-24\ge 0\cdots(가) \\ (x+1)(x-a^2+a)\le\cdots(나) \end{cases}$$

(가)에서

$$\begin{cases} (x-12)(x+2)\ge 0 \\ \therefore x\le -2 \text{또는} x\ge 12 \end{cases}$$

(가)와 (나)의 공통 범위가
존재하지 않으려면 다음 그림에서

$$\underbrace{-2 < a^2}_{(다)}\underbrace{-a < 12}_{(라)}$$

(다)에서

$$a^2-a+2>0, \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

$\therefore$모든 실수
(라)에서
$a^2-a-12<0, (a+3)(a-4)<0$
$\therefore -3<a<4$
따라서 (다)와 (라)의 공통 범위를 구하면
$-3<a<4$

19. 이차부등식 $x^2-2x-3>3|x-1|$의 해가 이차부등식 $ax^2+2x+c<0$의 해와 같을 때, 실수 a, c의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

1) $x \geq 1$ 일 때,
$x^2-2x-3>3x-3$, $x^2-5x>0$
$x(x-5)>0$, $x<0$ 또는 $x>5$
$\therefore x>5$
2) $x<1$ 일 때,
$x^2-2x-3>-3x+3$, $x^2+x-6>0$
$(x+3)(x-2)>0$, $x<-3$ 또는 $x>2$
$\therefore x<-3$
1), 2) 에서 $x<-3$ 또는 $x>5$
한편 $ax^2+2x+c<0$ 의 해가
$x<-3$ 또는 $x>5$ 이므로
$a<0$이고, $ax^2+2x+c=a(x+3)(x-5)$이다.
$ax^2+2x+c=ax^2-2ax-15a$에서
$a=-1, c=15 \quad \therefore a+c=14$

20. 두 개의 곡선 $y=ax^2+bx+8$, $y=2x^2-3x+2$ 의 두 교점을 연결하는 직선이 $y=-x+6$ 일 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

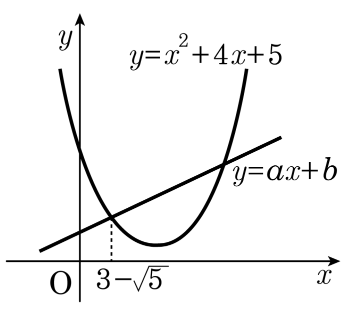
① $a=-1,\ b=-1$
② $a=-1,\ b=0$
③ $a=1,\ b=0$
④ $a=1,\ b=-1$
⑤ $a=0,\ b=1$

해설

$y=ax^2+bx+8 \quad \cdots ①$
$y=2x^2-3x+2 \quad \cdots ②$
$y=-x+6 \quad \cdots ③$

두 교점을 ①, ②, ③이 모두 지나므로
②, ③의 교점을 ①이 지난다고 생각해도 좋다.
②, ③을 연립하여 풀면
교점은 $(2,\ 4)$, $(-1,\ 7)$ 이고,
이 두 점을 곡선 ①이 지나므로
$4a+2b+8=4,\ a-b+8=7$
$\therefore\ a=-1,\ b=0$

21. 다음 그림과 같이 포물선 $y = x^2 - 4x + 5$ 와 직선 $y = ax + b$ 의 두 교점 중 한 교점의 x 좌표가 $3 - \sqrt{5}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?



① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

연립방정식 $y = x^2 - 4x + 5$, $y = ax + b$ 에서
y 를 소거하면 $x^2 - 4x + 5 = ax + b$
$x^2 - (4 + a)x + 5 - b = 0 \cdots$ ㉠
이 때, 계수가 유리수인 방정식 ㉠의 한 근이
$3 - \sqrt{5}$ 이므로 $3 + \sqrt{5}$ 도 근이 된다.
$\therefore\ (3 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5}) = 4 + a$
$(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 5 - b$
$\therefore\ a = 2,\ b = 1$
$\therefore a + b = 3$

22. $0 < x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 항상 $x^2 - 3 \le (a-1)x$ 가 성립할 때, 실수의 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a = -1$　　② $a > -1$　　③ $a \ge -1$
④ $a < -1$　　⑤ $a \le -1$

해설
$f(x) = x^2 - (a-1)x - 3$ 이라 두어,
$0 < x < 1$ 에서 $f(x) \le 0$ 되도록 하자.
$f(0) \le 0$ 그리고 $f(1) \le 0$ 이면 된다.
그런데, $f(0) = -3$ 이므로
$f(1) = 1 - (a-1) - 3 \le 0$ 에서 $a \ge -1$

23. $-1 \le x \le 1$ 에서 x 에 대한 부등식 $x+a \le x^2 \le 2x+b$ 가 항상 성립할 때, $b-a$ 의 최솟값을 p 라 하자. 이 때, $100p$ 의 값은?

① 275 ② 310 ③ 325 ④ 330 ⑤ 335

해설

$$x+a \le x^2 \le 2x+b \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \ge a \\ x^2 - 2x \le b \end{cases}$$

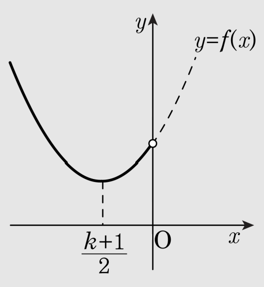
(i) $f(x) = x^2 - x$ 라 하면

$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

$-1 \le x \le 1$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-\frac{1}{4} \le f(x) \le 2$

즉, $-\frac{1}{4} \le x^2 - x \le 2$ 이므로 $a \le -\frac{1}{4}$



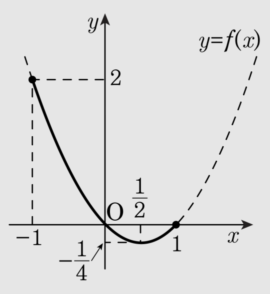
(ii) $g(x) = x^2 - 2x$ 라 하면

$g(x) = (x-1)^2 - 1$

$-1 \le x \le 1$ 에서 $y = g(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-1 \le g(x) \le 3$

즉, $-1 \le x^2 - 2x \le 3$ 이므로 $b \ge 3$



(i), (ii)에서 $b-a$ 의 최솟값 p 는

$p = 3 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{4}$

$\therefore\ 100p = 325$