1. 다항식 $f(x)$를 두 일차식 $x-1$, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$　② $-x+3$　③ $x-3$

④ $-x-3$　⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 2, 1이므로
$f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$를 대입하면
$f(1)=a+b=2$, $f(2)=2a+b=1$
두 식을 연립하여 구하면 $a=-1, b=3$
$\therefore$구하는 나머지는 $-x+3$

2. 다항식 $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$가 $x - 2$로 나누어 떨어지고 또, $x - 3$으로도 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지려면

$f(2) = 24 + 4a + 2b + 12 = 0$

$\therefore\ 4a + 2b + 36 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, $f(x)$ 가 $x - 3$ 으로 나누어 떨어지려면

$f(3) = 81 + 9a + 3b + 12 = 0$

$\therefore\ 9a + 3b + 93 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -13,\ b = 8$

3. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$이라 놓으면,
$x = -1$일 때, $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x) = (x+1)Q(x)$꼴
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x+1)$
$\therefore\ f(x) = (x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 14$

4. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x+2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$ 라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

5. 등식 $3x^3 - x + 2 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 가 x 에 관한 항등식이 되도록 상수 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 값을 정하면?

① $a = 3\ b = 7$, $c = -4$, $d = 4$

② $a = 3\ b = 9$, $c = 8$, $d = 4$

③ $a = 2\ b = 9$, $c = 6$, $d = 4$

④ $a = 1\ b = 3$, $c = 8$, $d = 4$

⑤ $a = 2\ b = -9$, $c = 6$, $d = 4$

해설

1	3	0	−1	2		
		3	3	2		
1	3	3	2	4	←	d
		3	6			
1	3	6	8	←	c	
		3				
	3	9	← b			
	↑					
	a					

$\therefore\ a = 3,\ b = 9,\ c = 8,\ d = 4$

해설

(i) $x - 1 = y$ 로 놓으면 $x = y + 1$ 이므로

$3(y+1)^3 - (y+1) + 2 = ay^3 + by^2 + cy + d$

$\therefore\ 3y^3 + 9y^2 + 8y + 4 = ay^3 + by^2 + cy + d$

$\therefore\ a = 3$, $b = 9$, $c = 8$, $d = 4$

(ii) x 대신 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$ 를 대입하면,

$x = 0$ 대입 : $2 = -a + b - c + d \cdots$①

$x = -1$ 대입 : $0 = -8a + 4b - 2c + d \cdots$②

$x = 1$ 대입 : $4 = d\ \ \cdots\cdots$③

$x = 2$ 대입 : $24 = a + b + c + d \cdots$④

①, ②, ③, ④를 연립하여 풀면,

$\therefore\ a = 3,\ b = 9,\ c = 8,\ d = 4$

6. 100개의 다항식 x^2-x-1 , x^2-x-2 , $\cdots$, $x^2-x-100$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해되는 것은 모두 몇 개인가?

① 5개　② 7개　③ 9개　④ 11개　⑤ 13개

해설

$x^2-x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수)라 하면
$b=a+1$, $ab=n$ $(1 \le n \le 100)$

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n=ab$	2	6	12	20	30	42	56	72	90

$\therefore$ 9(개)

7. 다음 중 $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x + y$ ② $-x - y$ ③ $x + y - 2$

④ $x - y$ ⑤ $2x + 2y$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= (x^2 + 2xy + y^2) - 2(x + y)\\ &= (x + y)^2 - 2(x + y)\\ &= (x + y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned}(x + y)(x + y - 2) &= -(-x - y)(x + y - 2)\\ &= \frac{1}{2}(2x + 2y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

8. $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$　　② $-(a+b+c)(a-b-c)$

③ $-(a+b)(b+c)(c+a)$　　④ $(a+b)(b+c)(c+a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c-a)$

해설

전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리한 후, 인수분해 한다.

$$
\begin{aligned}
&ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)\\
&=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)\\
&=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)\\
&=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\
&=(b-c)(a-b)(a-c)\\
&=-(a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}
$$

9. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 x^2+x+1 으로 나누면 나머지가 9, $f(x)-g(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누면 나머지가 -3 이다. 이 때, $f(x)$를 x^2+x+1로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x)+g(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+9$ ······㉠
$f(x)-g(x)=(x^2+x+1)Q_2(x)-3$ ······㉡
㉠ + ㉡을 하면
$2f(x)=(x^2+x+1)\left\{Q_1(x)+Q_2(x)\right\}+6$
$f(x)=(x^2+x+1)\dfrac{Q_1(x)+Q_2(x)}{2}+3$
$\therefore$ 나머지는 3

10. x^4+3x^2+4를 바르게 인수분해한 것은?

① $(x^2+x+1)(x^2-2x+1)$
② $(x^2+2x+2)(x^2-x+2)$
③ $(x^2-x+2)(x^2+x+2)$
④ $(x^2+x-1)(x^2-2x+1)$
⑤ $(x^2+x-2)(x^2+x+2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4+3x^2+4 &= (x^4+4x^2+4)-x^2 \\ &= (x^2+2)^2-x^2 \\ &= (x^2+x+2)(x^2-x+2) \end{aligned}$$

11. 다음 중 다항식 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$의 인수가 아닌 것은?

① $a-b$ ② $b-c$ ③ $c-a$

④ $a+b+c$ ⑤ $a-b+c$

해설

주어진 식을 a에 관하여 정리하면

(준식)$= a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$

$= (b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$= (b-c)\{b^2(c-a)+b(c^2-ca)-a(c^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$

$= (b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$

12. $\dfrac{899^3+1}{899\times 898+1}$ 의 양의 약수의 개수는?

① 27 개 ② 25 개 ③ 21 개 ④ 18 개 ⑤ 15 개

해설

$a=899$ 라 치환하면

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{a^3+1}{a(a-1)+1}\\ &= \frac{(a+1)\left(a^2-a+1\right)}{a^2-a+1}\\ &= a+1 = 900\end{aligned}$$

$900 = 2^2\times 3^2\times 5^2$

$$\begin{aligned}\therefore\ 900\text{ 의 약수의 개수} &= (2+1)\times(2+1)\times(2+1)\\ &= 27\end{aligned}$$

13. 임의의 자연수 k에 대하여 $x-k$로 나눈 나머지가 k인 다항식 $f(x)$의 개수를 구하면?

① 0 개　　② 1 개　　③ 2 개
④ 3 개　　⑤ 무수히 많다.

해설

나머지 정리에 의하여 임의의 자연수 k에 대하여 $\therefore\ f(k)=k$
따라서 $g(x)=f(x)-x$로 두면 모든 자연수에 대해서 $g(x)=0$이 성립
$\therefore\ g(x)=0$
즉, $f(x)=x$
$\therefore$ 1 개

14. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때, 나머지의 상수항은?

① 4　　② 3　　③ 2　　④ 1　　⑤ 0

해설

$f(x) = (x^2+1)(x-1)g(x) + ax^2 + bx + c$로 두면 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이므로

$ax^2+bx+c = a(x^2+1)+bx+c-a$에서

$bx+c-a = x+1$

$\therefore\ b=1,\ c-a=1$

또, $f(1) = a+b+c = 4$이므로

$c-1+1+c=4$에서 $c=2$

15. 세 실수 a, b, c 사이에 $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$ 인 관계가 성립할 때, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 0, 2

④ 0, 1　　⑤ 0, 1, 2

해설

$a^2 - bc = b^2 - ac$ 에서 $(a^2 - b^2) + (ac - bc) = 0$

$\therefore\ (a + b + c)(a - b) = 0 \cdots$ ㉠

$b^2 - ac = c^2 - ab$ 에서 $(b^2 - c^2) + (ab - ac) = 0$

$\therefore\ (a + b + c)(b - c) = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a + b + c = 0$ 또는 $a = b = c$

한편 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ 이므로

ⅰ) $a + b + c = 0$ 일 때 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

ⅱ) $a = b = c$ 일 때

(준식)$= 3a^3 - 3a^3 = 0$

따라서 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$