1. 등식 $(x+1)(x-1)(x^3-x^2+x-1) = x^5-x^4+ax-b$가 항상 성립하도록 a, b값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x=1$을 대입하면, $0 = a-b \cdots$ ㉠
양변에 $x=-1$을 대입하면, $0 = -2-a-b \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 에서 $a=b=-1$
$\therefore\ a+b=-2$

2. k의 값에 관계없이 $(3k^2+2k)x-(k+1)y-(k^2-1)z$의 값이 항상 1일 때, $x+y+z$의 값은?

① -3　② 0　③ 3　④ 6　⑤ 8

해설

주어진 식을 k에 대하여 정리하면
$k^2(3x-z)+k(2x-y)-(y-z)=1$
위 식이 k의 값에 관계없이 성립하므로 k에 대한 항등식이다.

$$\begin{cases} 3x-z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ z-y=1 & \tilde{}\cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$x=1,\ y=2,\ z=3$
$\therefore\ x+y+z=6$

3. x에 대한 삼차식 x^3+ax^2+bx+3이 x^2+1로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 정하면?

① $a=-1,\ b=3$
② $a=1,\ b=3$
③ $a=3,\ b=-1$
④ $a=-3,\ b=-1$
⑤ $a=3,\ b=1$

해설

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+bx+3 &= (x^2+1)(x+c) \\ &= x^3+cx^2+x+c \end{aligned}$$

$\therefore\ a=c,\ b=1,\ c=3$

$\therefore\ a=3,\ b=1$

4. x에 대한 다항식 $(ax-1)^3$의 전개식에서 모든 항의 계수의 합이 125일 때, 실수 a의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$x=1$을 대입하면 계수들의 합을 얻을 수 있다.
즉, $(a-1)^3=125, a-1=5$
$\therefore\ a=6$

5. $x^3 + 2x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$가 x의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 $a+b+c+d$의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

양변에 $x = 2$를 대입하면

$8 + 8 - 2 + 1 = a + b + c + d$

$\therefore\ a + b + c + d = 15$

해설

(ⅰ) a, b, c, d의 값을 각각 구하려면 우변을 전개하여 계수비교를 하거나

(ⅱ) 조립제법 : 좌변을 $x-1$로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b가 되고 마지막 몫의 계수가 a이다.

6. x에 대한 다항식 x^3+kx^2+kx-1을 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_1(x)$, R_1, $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_2(x)$, R_2라 할 때, $R_1=R_2$를 만족하는 실수 k의 값을 구하면?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} x^3+kx^2+kx-1 &= (x-2)Q_1(x)+R_1 \\ &= (x+2)Q_2(x)+R_2 \end{aligned}$$

$x=2$ 대입, $R_1=8+4k+2k-1=6k+7$

$x=-2$ 대입, $R_2=-8+4k-2k-1=2k-9$

$R_1=R_2$이므로 $6k+7=2k-9$

$\therefore\ k=-4$

7. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 2이고, $x+2$로 나눈 나머지가 5이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

나머지 정리에 의하여,
$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$라 할 수 있다.
$f(1)=a+b=2$
$f(-2)=-2a+b=5$
연립하면, $a=-1 \quad b=3$
$\therefore R(x)=-x+3$
$R(2)=1$

8. $a=(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\cdots(3^{1024}+1)$ 이라고 할 때 곱셈 공식을 이용하여 a의 값을 지수의 형태로 나타내면 $\frac{1}{k}(3^l+m)$ 이다. 이 때, $k+l+m$의 값을 구하면?

① 2046 ② 2047 ③ 2048 ④ 2049 ⑤ 2050

해설

$a=(3+1)\left(3^2+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)$

양변에 $(3-1)$을 곱하면

$$(3-1)\,a=(3-1)\,(3+1)\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)$$

$$\begin{aligned}2a&=\left(3^2-1\right)\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\&=\left(3^4-1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\&=\left(3^8-1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\&\ \ \vdots\\&=\left(3^{2048}-1\right)\end{aligned}$$

양변을 2로 나누면

$a=\frac{1}{2}\left(3^{2048}-1\right)$

$\therefore\ k=2,\ l=2048,\ m=-1$

$\therefore\ k+l+m=2049$

9. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{2007}+1=a_0+a_1(x+4)+a_2(x+4)^2+\cdots+a_{2007}(x+4)^{2007}$이 성립할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값은?

① $(-3)^{2007}+1$ ② 0 ③ $3^{2007}+1$
④ 1 ⑤ $3^{2007}+3$

해설

양변에 $x=-3$을 대입하면
$(-3)^{2007}+1=a_0+a_1+\cdots+a_{2007}$

10. 두 다항식 $Q(x)$ 와 $R(x)$ 에 대하여 $x^7-2=(x^3+x)Q(x)+R(x)$ 가 성립할 때, $Q(1)$ 의 값은? (단 $R(x)$ 의 차수는 이차 이하이다.)

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

해설

$R(x)=ax^2+bx+c(a,\ b,\ c$는 실수)라 하면
$x^7-2=x(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx+c$
양변에 $x=0$을 대입하면 $-2=c$
$x^7-2=x(x^2+1)Q(x)+ax^2+bx-2\cdots$①
①의 양변에 $x=i$을 대입하면
$-i-2=-a+bi-2$
$a=0,\ b=-1$이므로 $R(x)=-x-2$
$\therefore\ x^7-2=(x^3+x)Q(x)-x-2$
양변에 $x=1$을 대입하면
$-1=2Q(1)-3$이므로
$\therefore\ Q(1)=1$

11. x에 대한 다항식 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지는 $2x-7$이고, $x^2-3x-10$으로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이 다항식 $f(x)$를 x^2-6x+5로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$ ② $4x+3$ ③ $x-1$

④ $4x-9$ ⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 x^2-6x+5로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-6x+5)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-5)Q(x)+ax+b \cdots ㉠ \end{aligned}$$

$f(x)$를 x^2-4x+3으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,

$x^2-3x-10$으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4x+3)Q_1(x)+2x-7 \\ &= (x-1)(x-3)Q_1(x)+2x-7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x-10)Q_2(x)+11 \\ &= (x-5)(x+2)Q_2(x)+11 \end{aligned}$$

이므로 $f(1)=-5,\ f(5)=11$이다.

㉠에서

$f(1)=a+b=-5$

$f(5)=5a+b=11$이므로 연립하여 풀면

$a=4,\ b=-9$

따라서 구하는 나머지는 $4x-9$이다.

12. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 x^2+x+1 으로 나누면 나머지가 9, $f(x)-g(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누면 나머지가 -3 이다. 이 때, $f(x)$를 x^2+x+1로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x)+g(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+9$ ······㉠

$f(x)-g(x)=(x^2+x+1)Q_2(x)-3$ ······㉡

㉠ + ㉡을 하면

$2f(x)=(x^2+x+1)\left\{Q_1(x)+Q_2(x)\right\}+6$

$f(x)=(x^2+x+1)\dfrac{Q_1(x)+Q_2(x)}{2}+3$

$\therefore$ 나머지는 3

13. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지는 $2x+1$이고, $g(x)$를 x^2-5x+6으로 나눈 나머지는 $x-4$이다. 이 때, $(x+2)f(x)+3g(x+1)$을 $x-2$로 나눈 나머지를 구하면?

① 7 ② 9 ③ 13 ④ 17 ⑤ 23

해설

$f(x)=(x^2-4)p(x)+2x+1$에서 $f(2)=5$
$g(x)=(x^2-5x+6)q(x)+x-4$에서 $g(3)=-1$
$h(x)=(x+2)f(x)+3g(x+1)$이라 놓으면,
$h(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는
$h(2)=4f(2)+3g(3)=17$

14. x 의 다항식 $f(x) = x^5 - ax - 1$ 이 계수가 정수인 일차인수를 갖도록 정수 a 의 값을 구하면?

① $a = 0$ 또는 2　② $a = 1$ 또는 2　③ $a = -1$ 또는 2
④ $a = 0$ 또는 1　⑤ $a = 0$ 또는 -2

해설

상수항이 -1 이므로 만일 일차인수가 있다면 그것은 $x - 1$ 또는 $x + 1$ 뿐이다.
(i) $f(1) = 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = 0$
(ii) $f(-1) = -1 + a - 1 = 0$ 에서 $a = 2$

15. x의 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x^2) = x^3 f(x+1) - 2x^4 + 2x^2$이 성립할 때, $f(x)$를 구하면? (단, $f(0) = f(1) = f(2) = 0$)

① $f(x) = x(x-1)(x-2)$
② $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$
③ $f(x) = x(x-1)^2(x-2)$
④ $f(x) = x(x-1)(x-2)^2$
⑤ $f(x) = x^2(x-1)^2(x-2)$

해설

(i) $f(x)$를 n차의 식이라하면
좌변 :$2n$차=우변 :$n+3$차
$\therefore\ n = 3$

(ii) $f(x) = kx(x-1)(x-2)$(단, $k \neq 0$)
($\because\ f(0) = f(1) = f(2) = 0$)
좌변 $= kx^6 - 3kx^4 + 2kx^2$
우변 $= kx^6 - (k+2)x^4 + 2x^2$
$\therefore\ kx^6 - 3kx^4 + 2kx^2 = kx^6 - (k+2)x^4 + 2x^2$
$-3k = -(k+2)$
$k = 2$에서 $k = 1$
$\therefore\ f(x) = x(x-1)(x-2)$

16. 다항식 $f(x)$를 $x-k$로 나눈 몫과 나머지를 $Q_1(x), R_1$이라 하고 $Q_1(x)$를 $x-k$로 나눈 몫과 나머지를 $Q_2(x), R_2, \quad \cdots \quad, Q_n(x)$를 $x-k$로 나눈 몫과 나머지를 $Q_{n+1}(x), R_{n+1}$이라 할 때, $f(x)$를 $(x-k)^n$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하면, $R(k)$의 값은 얼마인가?

① 0 ② kR_1

③ R_1 ④ $R_1+R_2+\cdots+R_n$

⑤ $R_1 \cdot R_2 \cdot \cdots \cdot R_n$

해설

$$f(x)=(x-k)Q_1(x)+R_1$$
$$Q_1(x)=(x-k)Q_2(x)+R_2$$
$$\vdots$$
$$Q_n(x)=(x-k)Q_{n+1}(x)+R_{n+1}$$
$$\begin{aligned}\therefore\ f(x) &= (x-k)\{(x-k)Q_2(x)+R_2\}+R_1\\ &= (x-k)^2Q_2(x)+(x-k)R_2+R_1\\ &= (x-k)^nQ_n(x)+(x-k)^{n-1}R_n+\cdots+(x-k)R_2+R_1\end{aligned}$$
$$\therefore\ R(x)=(x-k)^{n-1}R_n+\cdots+(x-k)R_2+R_1$$
$$\therefore\ R(k)=R_1$$

17. 4차의 다항식 $f(x)$가 $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{2}{3}$, $f(3) = \frac{3}{4}$, $f(4) = \frac{4}{5}$를 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

주어진 조건에 따라
$f(n) = \frac{n}{n+1}(n = 0, 1, 2, 3, 4)$
$(n+1)f(n) - n = 0$
$g(x) = (x+1)f(x) - x$로 놓으면
$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 0$
그런데 $g(x)$는 다항식이므로 나머지정리에 의해
$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$를 인수로 갖는다.
또, $f(x)$가 4차식이므로 $g(x)$는 5차식이다.
$\therefore\ g(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(a \neq 0) \cdots$ ㉠
그런데, $g(-1) = 1$이므로 ㉠에서
$g(-1) = -(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)a = 1$
$\therefore\ a = -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}$
$g(x) = (x+1)f(x) - x$
$= -\frac{1}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
$g(5) = 6f(5) - 5 = -\frac{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} = -1$
$\therefore\ f(5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$