1. 등식 $(x+1)(x-1)(x^3-x^2+x-1) = x^5-x^4+ax-b$가 항상 성립하도록 a, b값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x=1$을 대입하면, $0=a-b\cdots$ ㉠
양변에 $x=-1$을 대입하면, $0=-2-a-b\cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 에서 $a=b=-1$
$\therefore\ a+b=-2$

2. k의 값에 관계없이 $(3k^2+2k)x-(k+1)y-(k^2-1)z$의 값이 항상 1일 때, $x+y+z$의 값은?

① -3 ② 0 ③ 3 ④ 6 ⑤ 8

해설

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$k^2(3x-z)+k(2x-y)-(y-z)=1$

위 식이 k의 값에 관계없이 성립하므로 k에 대한 항등식이다.

$$\begin{cases} 3x-z=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ z-y=1 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=2,\ z=3$

$\therefore\ x+y+z=6$

3. x에 대한 삼차식 x^3+ax^2+bx+3이 x^2+1로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 정하면?

① $a=-1,\ b=3$
② $a=1,\ b=3$
③ $a=3,\ b=-1$
④ $a=-3,\ b=-1$
⑤ $a=3,\ b=1$

해설

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+bx+3 &= (x^2+1)(x+c) \\ &= x^3+cx^2+x+c \end{aligned}$$

$\therefore\ a=c,\ b=1,\ c=3$

$\therefore\ a=3,\ b=1$

4. x에 대한 다항식 $(ax-1)^3$의 전개식에서 모든 항의 계수의 합이 125일 때, 실수 a의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$x=1$을 대입하면 계수들의 합을 얻을 수 있다.
즉, $(a-1)^3=125, a-1=5$
$\therefore\ a=6$

5. $x^3 + 2x^2 - x + 1 = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$가 x의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 $a+b+c+d$의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

양변에 $x = 2$를 대입하면

$8 + 8 - 2 + 1 = a + b + c + d$

$\therefore\ a + b + c + d = 15$

해설

(i) a, b, c, d의 값을 각각 구하려면 우변을 전개하여 계수비교를 하거나

(ii) 조립제법 : 좌변을 $x-1$로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 d, c, b가 되고 마지막 몫의 계수가 a이다.

6. x에 대한 다항식 x^3+kx^2+kx-1을 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_1(x)$, R_1, $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_2(x)$, R_2라 할 때, $R_1=R_2$를 만족하는 실수 k의 값을 구하면?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} x^3+kx^2+kx-1 &= (x-2)Q_1(x)+R_1 \\ &= (x+2)Q_2(x)+R_2 \end{aligned}$$

$x=2$ 대입, $R_1=8+4k+2k-1=6k+7$

$x=-2$ 대입, $R_2=-8+4k-2k-1=2k-9$

$R_1=R_2$이므로 $6k+7=2k-9$

$\therefore\ k=-4$

7. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 2이고, $x+2$로 나눈 나머지가 5이다. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x+2)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

나머지 정리에 의하여,
$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$라 할 수 있다.
$f(1) = a + b = 2$
$f(-2) = -2a + b = 5$
연립하면, $a = -1 \quad b = 3$
$\therefore R(x) = -x + 3$
$R(2) = 1$

8. $a=(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\cdots(3^{1024}+1)$ 이라고 할 때 곱셈 공식을 이용하여 a의 값을 지수의 형태로 나타내면 $\frac{1}{k}(3^l+m)$ 이다. 이 때, $k+l+m$의 값을 구하면?

① 2046 ② 2047 ③ 2048 ④ 2049 ⑤ 2050

해설

$a=(3+1)\left(3^2+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)$

양변에 $(3-1)$을 곱하면

$$(3-1)a=(3-1)(3+1)\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)$$

$$\begin{aligned}2a&=\left(3^2-1\right)\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\&=\left(3^4-1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\&=\left(3^8-1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\&\ \ \vdots\\&=\left(3^{2048}-1\right)\end{aligned}$$

양변을 2로 나누면

$$a=\frac{1}{2}\left(3^{2048}-1\right)$$

$\therefore\ k=2,\ l=2048,\ m=-1$

$\therefore\ k+l+m=2049$

9. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{2007}+1=a_0+a_1(x+4)+a_2(x+4)^2+\cdots+a_{2007}(x+4)^{2007}$이 성립할 때, $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값은?

① $(-3)^{2007}+1$　② 0　③ $3^{2007}+1$

④ 1　⑤ $3^{2007}+3$

해설

양변에 $x=-3$을 대입하면

$(-3)^{2007}+1=a_0+a_1+\cdots+a_{2007}$

10. 두 다항식 $Q(x)$와 $R(x)$에 대하여 $x^7 - 2 = (x^3 + x)Q(x) + R(x)$가 성립할 때, $Q(1)$의 값은? (단 $R(x)$의 차수는 이차 이하이다.)

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

해설

$R(x) = ax^2 + bx + c(a,\ b,\ c$는 실수)라 하면

$x^7 - 2 = x(x^2+1)Q(x) + ax^2 + bx + c$

양변에 $x = 0$을 대입하면 $-2 = c$

$x^7 - 2 = x(x^2+1)Q(x) + ax^2 + bx - 2 \cdots$①

①의 양변에 $x = i$을 대입하면

$-i - 2 = -a + bi - 2$

$a = 0,\ b = -1$이므로 $R(x) = -x - 2$

$\therefore\ x^7 - 2 = (x^3 + x)Q(x) - x - 2$

양변에 $x = 1$을 대입하면

$-1 = 2Q(1) - 3$이므로

$\therefore\ Q(1) = 1$

11. x에 대한 다항식 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지는 $2x-7$이고, $x^2-3x-10$으로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이 다항식 $f(x)$를 x^2-6x+5로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$　　② $4x+3$　　③ $x-1$

④ $4x-9$　　⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 x^2-6x+5로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-6x+5)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-5)Q(x)+ax+b \cdots ㉠ \end{aligned}$$

$f(x)$를 x^2-4x+3으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
$x^2-3x-10$으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4x+3)Q_1(x)+2x-7 \\ &= (x-1)(x-3)Q_1(x)+2x-7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x-10)Q_2(x)+11 \\ &= (x-5)(x+2)Q_2(x)+11 \end{aligned}$$

이므로 $f(1)=-5,\ f(5)=11$이다.
㉠에서
$f(1)=a+b=-5$
$f(5)=5a+b=11$이므로 연립하여 풀면
$a=4,\ b=-9$
따라서 구하는 나머지는 $4x-9$이다.

12. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 x^2+x+1 으로 나누면 나머지가 9, $f(x)-g(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누면 나머지가 -3 이다. 이 때, $f(x)$를 x^2+x+1로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x)+g(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+9$ ······㉠

$f(x)-g(x)=(x^2+x+1)Q_2(x)-3$ ······㉡

㉠ + ㉡을 하면

$2f(x)=(x^2+x+1)\left\{Q_1(x)+Q_2(x)\right\}+6$

$f(x)=(x^2+x+1)\dfrac{Q_1(x)+Q_2(x)}{2}+3$

$\therefore$ 나머지는 3

13. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지는 $2x+1$이고, $g(x)$를 x^2-5x+6으로 나눈 나머지는 $x-4$이다. 이 때, $(x+2)f(x)+3g(x+1)$을 $x-2$로 나눈 나머지를 구하면?

① 7 ② 9 ③ 13 ④ 17 ⑤ 23

해설

$f(x)=(x^2-4)p(x)+2x+1$에서 $f(2)=5$
$g(x)=(x^2-5x+6)q(x)+x-4$에서 $g(3)=-1$
$h(x)=(x+2)f(x)+3g(x+1)$이라 놓으면,
$h(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는
$h(2)=4f(2)+3g(3)=17$

14. x 의 다항식 $f(x) = x^5 - ax - 1$ 이 계수가 정수인 일차인수를 갖도록 정수 a 의 값을 구하면?

① $a = 0$ 또는 2 ② $a = 1$ 또는 2 ③ $a = -1$ 또는 2

④ $a = 0$ 또는 1 ⑤ $a = 0$ 또는 -2

해설

상수항이 -1 이므로 만일 일차인수가 있다면 그것은 $x - 1$ 또는 $x + 1$ 뿐이다.

(ⅰ) $f(1) = 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = 0$

(ⅱ) $f(-1) = -1 + a - 1 = 0$ 에서 $a = 2$

15. x의 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x^2)=x^3f(x+1)-2x^4+2x^2$이 성립할 때, $f(x)$를 구하면? (단, $f(0)=f(1)=f(2)=0$)

① $f(x)=x(x-1)(x-2)$　② $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$

③ $f(x)=x(x-1)^2(x-2)$　④ $f(x)=x(x-1)(x-2)^2$

⑤ $f(x)=x^2(x-1)^2(x-2)$

해설

(ⅰ) $f(x)$를 n차의 식이라하면

좌변 :$2n$차=우변 :$n+3$차

$\therefore\ n=3$

(ⅱ) $f(x)=kx(x-1)(x-2)$(단, $k\neq 0$)

($\because\ f(0)=f(1)=f(2)=0$)

좌변 $=kx^6-3kx^4+2kx^2$

우변 $=kx^6-(k+2)x^4+2x^2$

$\therefore\ kx^6-3kx^4+2kx^2=kx^6-(k+2)x^4+2x^2$

$-3k=-(k+2)$

$k=2$에서 $k=1$

$\therefore\ f(x)=x(x-1)(x-2)$

16. 다항식 $f(x)$를 $x-k$로 나눈 몫과 나머지를 $Q_1(x), R_1$이라 하고 $Q_1(x)$를 $x-k$로 나눈 몫과 나머지를 $Q_2(x), R_2$, $\cdots$, $Q_n(x)$를 $x-k$로 나눈 몫과 나머지를 $Q_{n+1}(x), R_{n+1}$이라 할 때, $f(x)$를 $(x-k)^n$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하면, $R(k)$의 값은 얼마인가?

① 0 ② kR_1

③ R_1 ④ $R_1+R_2+\cdots+R_n$

⑤ $R_1 \cdot R_2 \cdot \cdots \cdot R_n$

해설

$$f(x)=(x-k)Q_1(x)+R_1$$
$$Q_1(x)=(x-k)Q_2(x)+R_2$$
$$\vdots$$
$$Q_n(x)=(x-k)Q_{n+1}(x)+R_{n+1}$$
$$\begin{aligned}\therefore\ f(x)&=(x-k)\{(x-k)Q_2(x)+R_2\}+R_1\\&=(x-k)^2Q_2(x)+(x-k)R_2+R_1\\&=(x-k)^nQ_n(x)+(x-k)^{n-1}R_n+\cdots+(x-k)R_2+R_1\end{aligned}$$
$$\therefore\ R(x)=(x-k)^{n-1}R_n+\cdots+(x-k)R_2+R_1$$
$$\therefore\ R(k)=R_1$$

17. 4차의 다항식 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f(1)=\frac{1}{2}$, $f(2)=\frac{2}{3}$, $f(3)=\frac{3}{4}$, $f(4)=\frac{4}{5}$를 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

주어진 조건에 따라

$f(n)=\frac{n}{n+1}(n=0,1,2,3,4)$

$(n+1)f(n)-n=0$

$g(x)=(x+1)f(x)-x$로 놓으면

$g(0)=g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=0$

그런데 $g(x)$는 다항식이므로 나머지정리에 의해

$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$를 인수로 갖는다.

또, $f(x)$가 4차식이므로 $g(x)$는 5차식이다.

$\therefore\ g(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(a\neq 0)\cdots$ ㉠

그런데, $g(-1)=1$이므로 ㉠에서

$g(-1)=-(5\times 4\times 3\times 2\times 1)a=1$

$\therefore\ a=-\frac{1}{(5\times 4\times 3\times 2\times 1)}$

$g(x)=(x+1)f(x)-x$

$=-\frac{1}{(5\times 4\times 3\times 2\times 1)}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

$g(5)=6f(5)-5=-\frac{(5\times 4\times 3\times 2\times 1)}{(5\times 4\times 3\times 2\times 1)}=-1$

$\therefore\ f(5)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$