

1. 자연수 x 에 대하여 $R(x)$ 는 x 를 5 로 나눈 나머지로 정의한다.
 $R(1) + R(2) + R(3) + \cdots + R(N) = 1010$ 일 때 N 의 값을 구하여라.
(단, N 은 홀수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 505

해설

$R(1) = 1, R(2) = 2, R(3) = 3, R(4) = 4, R(5) = 0, R(6) = 1, \dots$

→ 연속되는 다섯 숫자의 나머지의 합이 10 인 것을 알 수 있다.

$$\frac{1010}{10} = 101$$

→ 연속되는 다섯 숫자의 쌍이 101 이 되려면 $N = 505$ 이다.

2. 네 자리 자연수 $b3a1$ 이 11 의 배수이고, $c581$ 이 9 의 배수일 때, $\frac{a+b}{c}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : $\frac{15}{4}$

해설

11 의 배수는 짝수 자리 수의 합에서 홀수 자리 수의 합을 뺀
절댓값이 0 이거나 11 의 배수이면 되므로,
 $a + b - 4 = 11k$ 이므로, $a + b = 4, 15$ 이다.
9 의 배수는 각 자리의 수를 더한 값이 9 의 배수이므로
 $c + 5 + 8 + 1 = 9n$ 이므로, $c = 4$ 이다.
 $\therefore \frac{a+b}{c} = 1, \frac{15}{4}$

3. $3^3 = a$, $11^b = 121$ 을 만족하는 자연수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

- ① 29 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 46

해설

$3^3 = 27$, $11^2 = 121$ 이므로 $a = 27$, $b = 2$ 이다.
따라서 $a + b = 29$ 이다.

4. $32 \times a$ 가 어떤 자연수의 제곱이 될 때, a 가 될 수 있는 수 중 20 보다 작은 수의 개수를 구하면?

① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

$32 = 2^5$ 이므로

a 가 될 수 있는 수는 $2 \times (\text{자연수})^2$ 의 꼴이다.

따라서 a 가 될 수 있는 20 보다 작은 수는 2, 2^3 , 2×3^2 , 즉 3 개이다.

5. 자연수 n 의 약수의 개수를 $S(n)$ 이라 정의한다. $\frac{S(n)}{S(17)} = S(16)$ 을 만족하는 n 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 48

해설

$S(17) = 2, S(16) = 5$ 이므로, $S(n) = 10$ 이다.
 $n = a^x \times b^y$ 라 두면, $(x+1) \times (y+1) = 10$ 이므로,
 $(x,y) = (1,4), (4,1)$ 이다.
이러한 x,y 의 값을 만족하는 수 중 가장 작은 수는
 $2^1 \times 3^4, 2^4 \times 3^1$ 중의 하나이다.
 $\therefore n$ 중에서 가장 작은 수= 48

6. 자연수 a 에 대하여 $P(a)$ 는 약수의 개수를 나타낸 다고 할 때,
 $P(1200) = P(3^5 \times 7^n)$ 에서 n 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$ 이므로
약수의 개수는 $(4+1) \times (1+1) \times (2+1) = 30$ (개)
 $3^5 \times 7^n$ 의 약수의 개수는
 $(5+1) \times (n+1) = 6(n+1)$ (개)
 $6 \times (n+1) = 30$ 이므로 $n+1 = 5$ 이다.
 $\therefore n = 4$

7. a 가 자연수일 때, $f(a)$ 는 a 의 약수의 개수를 나타낸다고 정의한다.
 x 는 1 이상 100 이하이고, $f(x) = 3$ 일 때, x 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 3 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$f(x) = 3$ 에서 약수의 개수가 3 개인 수는
(소수)² 이므로
100 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는
 $2^2, 3^2, 5^2, 7^2$ 의 4 개

8. 다음 중 서로소인 것은?

① (14, 21)

② (36, 72)

③ (8, 90)

④ (11, 121)

⑤ (9, 19)

해설

서로소는 최대공약수가 1인 두 자연수를 말하므로 (9, 19)이다.

9. 18과 a 의 공약수가 1, 2, 3, 6일 때, a 가 될 수 있는 50보다 작은 자연수는 모두 몇 개인가?

① 4 개 ② 5 개 ③ 6 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

18과 a 의 최대공약수가 6이므로

$$18 = 6 \times 3, a = 6 \times k$$

k 는 3의 배수이면 안 된다.

따라서 50보다 작은 자연수 a 는

$$6 \times 1 = 6, 6 \times 2 = 12, 6 \times 4 = 24, 6 \times 5 = 30, 6 \times 7 = 42, \\ 6 \times 8 = 48 \text{의 } 6 \text{ 개이다.}$$

10. 두 자연수 p, q 의 최대공약수를 $[p, q]$ 로 정의할 때,
 $[[\frac{p}{[p, q]}, q], [\frac{q}{[p, q]}, p]]$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned} & [[\frac{p}{[p, q]}, q], [\frac{q}{[p, q]}, p]] \\ &= [[\frac{p}{[p, q]}, q], [\frac{q}{[p, q]}, p]] \\ &= [[\frac{p}{[p, q]}, q], [\frac{q}{[p, q]}, p]] \text{ (}\frac{p}{[p, q]}, q \text{는 서로소)} \\ &= [1, 1] \\ &= 1 \end{aligned}$$

11. 화장실 바닥의 가로와 세로의 길이가 각각 300 cm, 270 cm인 화장실 벽의 적당한 높이에 정사각형 모양의 타일을 빈틈없이 띠처럼 둘러 붙이려고 한다. 타일을 쪼개지 않고 붙이려고 할 때, 가능한 타일의 한 변의 길이가 아닌 것은?



- ① 1 cm ② 2 cm ③ 4 cm ④ 5 cm ⑤ 10 cm

해설

타일의 한 변의 길이가 300과 270의 공약수이면 타일을 쪼개지 않고 붙일 수 있다.
 $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$, $270 = 2 \times 3^3 \times 5$ 이므로
두 수의 최대공약수는 $2 \times 3 \times 5 = 30$ 이다.
따라서 타일의 한 변의 길이는 1 cm, 2 cm, 3 cm, 5 cm, 6 cm, 10 cm, 15 cm, 30 cm가 가능하다.

12. 세 수 124, 156, 204를 어떤 수로 나누었더니 그 나머지가 모두 같았다. 어떤 수 중에서 가장 큰 수와 그 때의 나머지를 구하여라.

- ① 어떤 수 : 7, 나머지 : 2 ② 어떤 수 : 9, 나머지 : 5
③ 어떤 수 : 12, 나머지 : 6 ④ 어떤 수 : 16, 나머지 : 2
⑤ 어떤 수 : 16, 나머지 : 12

해설

어떤 수를 x , 나머지를 r 이라 하고 세 수 124, 156, 204의 몫을 각각 Q_1, Q_2, Q_3 라 하면

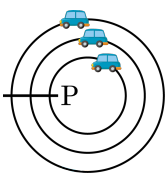
$$124 = xQ_1 + r, 156 = xQ_2 + r, 204 = xQ_3 + r \text{이므로}$$

각각의 수의 차는 x 로 나누어 떨어진다.

$$204 - 124 = 80, 204 - 156 = 48, 156 - 124 = 32$$

32, 48, 80의 최대공약수는 16이므로 어떤 수는 16이고 그 때의 나머지는 12이다.

13. 장난감 자동차 세 대가 다음 그림과 같은 원을 따라 각각의 원주 위를 일정한 속력으로 돌고 있다. 18분 동안 A 자동차는 24바퀴를 돌고, B 자동차는 36바퀴, C 자동차는 45바퀴를 돈다. 세 자동차가 동시에 P 지점에서 출발하여 1시간 10분 동안 일정한 속도로 돌았다면 동시에 P 지점을 몇 번 통과하는가?



- ① 9번 ② 10번 ③ 11번 ④ 12번 ⑤ 13번

해설

A, B, C 세 자동차가 한 바퀴를 도는 데 걸리는 시간은 $\frac{18}{24}$ 분, $\frac{18}{36}$ 분, $\frac{18}{45}$ 분이다.
 $\frac{18}{24}$ 분 = 45초, $\frac{18}{36}$ 분 = 30초, $\frac{18}{45}$ 분 = 24초이다.
 45, 30, 24의 최소공배수는 360이므로
 360초 = 6분마다 한 번씩 P 지점을 통과한다.
 따라서 $70 \div 6 = 11 \cdots 4$ 이므로 11번 통과한다.

14. 두 정수 a, b 가 $b < a < 0$ 일 때, $|a| + |b - a| = 5$ 이다. 이를 만족하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$b < a < 0$ 이므로, $|a| = -a$, $|b - a| = -(b - a)$ 이다.

$$|a| + |b - a| = 5$$

$$(-a) - (b - a) = 5$$

$$\therefore b = -5$$

$-5 < a < 0$ 이므로, a 는 $-4, -3, -2, -1$ 중 하나이다.

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 4 개이다.

15. 네 정수 a, b, c, d 가 다음 조건을 만족할 때, a 와 부호가 같은 것을 모두 구하여라

$$ab + cd < 0, \quad \frac{a}{b} > 0, \quad a + b + c = 0$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : b

▷ 정답 : d

해설

$\frac{a}{b} > 0$ 이므로 $a > 0$ 일 때와 $a < 0$ 일 때로 나누어 풀어 본다.

(1) $a > 0$ 이면, $b > 0$ 이다.

$a + b + c = 0$, $c < 0$ 이다.

$ab + cd < 0$, $ab > 0$ 이므로 $d > 0$ 이다.

(1) $a < 0$ 이면, $b < 0$ 이다.

$a + b + c = 0$, $c > 0$ 이다.

$ab + cd < 0$, $ab > 0$ 이므로 $d < 0$ 이다.

따라서 항상 a 와 부호가 같은 것은 b, d 이다.

16. $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \cdots + \frac{1}{2499}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{25}{51}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \cdots + \frac{1}{2499} \\ &= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \cdots + \frac{1}{49 \times 51} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) \\ & \quad + \cdots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{51} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{51} \right) \\ &= \frac{25}{51} \end{aligned}$$

17. 다음 조건을 만족시키는 세 정수 a, b, c 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

- ㉠ a 와 4의 합은 양수이고, a 와 2의 합은 음수이다.
- ㉡ b 와 c 의 절댓값은 a 의 절댓값보다 작다.
- ㉢ b 는 c 보다 a 에 더 가깝다.

- ㉠ $a < b < c$
- ㉡ $b < a < c$
- ㉢ $a < c < b$
- ㉣ $b < c < a$
- ㉤ $c < a < b$

해설

㉠ a 와 4의 합이 양수이고, a 와 2의 합은 음수이므로 $a < 0$ 이고 $2 < (a \text{의 절댓값}) < 4$ 이다. $\therefore a = -3$ ($\because a$ 는 정수)
㉡ $(b \text{와 } c \text{의 절댓값}) < 3$ 이므로 $-3 < b < 3, -3 < c < 3$ 이다.
㉢ b 는 c 보다 a 에 가깝다.
 $\therefore -3 < b < c < 3$
따라서, ㉠, ㉢에 의하여 $a < b < c$

18. 두 유리수 a, b 에 대하여 $\frac{b}{a} < 0$, a 의 절댓값이 $\frac{1}{2}$, b 의 절댓값이 $\frac{2}{3}$ 일 때, $(a-b)^2$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{25}{36}$ ⑤ $\frac{49}{36}$

해설

$\frac{b}{a} < 0$ 이므로 a, b 는 서로 다른 부호의 수이다.

$$(1) a > 0, b < 0 \text{ 일 때, } a = \frac{1}{2}, b = -\frac{2}{3}$$

$$(a-b)^2 = \left\{ \frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right\}^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right)^2 = \left(\frac{3}{6} + \frac{4}{6} \right)^2 = \frac{49}{36}$$

$$(2) a < 0, b > 0 \text{ 일 때, } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{2}{3}$$

$$(a-b)^2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right)^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right)^2 = \frac{49}{36}$$

$$(1), (2) \text{에 의해 } (a-b)^2 = \frac{49}{36}$$

19. 네 개의 유리수 $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{2}$, -2 중에서 세 개를 뽑아 곱한 수 중 가장 큰 수를 M , 가장 작은 수를 m 이라 할 때, $M + (-3m)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{2}$, -2 중에서 세 개를 뽑아 곱한 수 중

가장 큰 수는 $M = 1$ 가장 작은 수는 $m = -\frac{5}{3}$

$\therefore M + (-3m) = 1 + 5 = 6$

20. 두 정수 a, b 에 대하여 $\begin{cases} a * b &= a \times b^2 \\ a \star b &= -a^2 \times b \end{cases}$ 라 하자.

$\{(-2) * (-1)\} \star \{3 * (-1)\}$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

$$(-2) * (-1) = (-2) \times (-1)^2 = -2 ,$$

$$3 * (-1) = 3 \times (-1)^2 = 3$$

$$-2 \star 3 = -(-2)^2 \times 3 = -12$$

21. 다음 식을 계산한 값의 0의 개수를 구하여라. (단, $2^{10} = 1024$)

$2^{10} \times (5^{10} + 2^4)$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$$\begin{aligned} 2^{10} \times (5^{10} + 2^4) &= 2^{10} \times 5^{10} + 2^{10} \times 2^4 \\ &= 10^{10} + 1024 \times 16 \end{aligned}$$

$1024 \times 16 = 16384$ 이므로

$\therefore (0 \text{의 개수}) = 10 - 5 = 5(\text{개})$

22. 두 정수 a, b 에 대하여 b 의 절댓값이 a 의 절댓값보다 6 배 크고, $a < b$, $a \times b < 0$, $b - a = 14$ 를 만족할 때, $a + b$ 의 값은?

① 2 ② 6 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

$ab < 0$, $a < b$ 에서 $a < 0$, $b > 0$

$|b| = 6 \times |a|$ 에서 $b = -6a$ $-6a - a = -7a = 14$, $\therefore a = -2$

$\therefore b = -6a = (-6) \times (-2) = 12$

$\therefore a + b = -2 + 12 = 10$

23. 분배법칙 $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ 를 이용하여 두 수 $8^{29} - 8^{28}$, 8^{28} 의 대소 관계를 구하면?

① $8^{29} - 8^{28} < 8^{28}$

② $8^{29} - 8^{28} \leq 8^{28}$

③ $8^{29} - 8^{28} \geq 8^{28}$

④ $8^{29} - 8^{28} > 8^{28}$

⑤ $8^{29} - 8^{28} = 8^{28}$

해설

$$\begin{aligned} 8^{29} - 8^{28} &= 8 \times 8^{28} - 8^{28} = (8 - 1)8^{28} = 7 \times 8^{28} \text{ 이므로} \\ 8^{29} - 8^{28} &> 8^{28} \end{aligned}$$

24. 두 수 a, b 에 대하여 $a * b = -\frac{a}{a+b}$ 로 정의할 때,
 $\{(a * b) * (b * a)\} + \frac{1}{2(a * b)}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned} a * b &= -\frac{a}{a+b} = -\frac{1}{a+b} \\ \{(a * b) * (b * a)\} + \frac{1}{2(a * b)} \\ &= \left\{ \left(-\frac{1}{a+b}\right) * \left(-\frac{1}{a+b}\right) \right\} - \frac{a+b}{2} \\ &= \left\{ -\frac{1}{-\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+b}} \right\} - \frac{a+b}{2} \\ &= \frac{a+b}{2} - \frac{a+b}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

25. $\frac{83}{13} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{2}}}}$ 일 때, $a + b + c - d$ 의 값을 구하여라. (단, a, b, c, d 는 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8 또는 +8

해설

$$\frac{83}{13} = 6 + \frac{5}{13}, \frac{5}{13} = \frac{1}{\frac{13}{5}} = \frac{1}{2 + \frac{3}{5}}$$
$$\frac{3}{5} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}, \frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \text{ 이므로}$$
$$\frac{83}{13} = 6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

따라서 $a = 6, b = 2, c = 1, d = 1$ 이므로 $a + b + c - d = 6 + 2 + 1 - 1 = 8$