1. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이 $x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가질 때, 상수 $a,\ b$ 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이
$x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가지므로
$y = a(x-2)^2 + 5 = ax^2 - 4ax + 4a + 5$
위의 식이 $y = ax^2 + bx - 3$ 과 일치하므로
$-4a = b,\ 4a + 5 = -3$
$\therefore a = -2,\ b = 8$
$\therefore a + b = 6$

2. 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최솟값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ 에서
$x = 1$ 일 때 최소이며 최솟값은 $f(1) = 1$

3. $-2 \le x \le 3$에서 $y = x^2 - 2x - 2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 3 ② 7 ③ -2 ④ 0 ⑤ 1

해설

$y = (x-1)^2 - 3$이고 꼭짓점의 x좌표가 주어진 x의 범위에 포함되므로

$x = 1$에서 최솟값을 $x = -2$에서 최댓값을 갖는다.

(최댓값)$=(-2)^2 - 2(-2) - 2 = 6$

(최솟값)$=-3$

4. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = -1$ 에서 최댓값 7 을 갖고, $f(2) = -2$ 를 만족할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 3 ② 7 ③ 11 ④ −3 ⑤ −5

해설

$f(x) = a(x+1)^2 + 7, f(2) = -2$
$\Rightarrow 3^2 \times a + 7 = -2, a = -1$
$\therefore\ f(x) = -(x+1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6$
따라서 $a + b + c = 3$

5. 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3\ (0 \le x \le 3)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

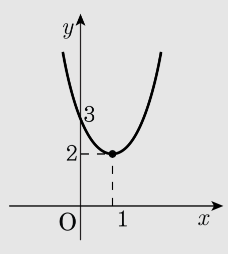
$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ 에서
$x = 1$ 일 때 최솟값 : -4,
$x = 3$ 일 때 최댓값 : 0
최댓값 + 최솟값 $= -4$

6. 함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 x의 범위가 $0 < x < 1$ 일 때, 이 함수의 함숫값의 범위을 구하면?

① $-2 < y < 3$　② $-2 < y < 2$　③ $0 < y < 3$
④ $0 < y < 2$　⑤ $2 < y < 3$

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$
따라서 함수의 그래프는 다음의 그림과 같다.
$f(0) = 3,\ f(1) = 2$ 이므로
함숫값의 범위은 $2 < y < 3$



7. 이차함수 $y = ax^2 + 2x + 4 + 2a$ $(a \neq 0)$ 의 최댓값이 3 일 때, a 의 값은?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

해설

이차함수에서 최댓값을 가지려면 이차항의 계수 a 의 부호는 음수이다.
주어진 식을 변형 하면

$y = a\left\{x^2 + \frac{2}{a}x + \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^2\right\} + 4 + 2a$

$= a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + 4 + 2a - \frac{1}{a}$

따라서 $x = -\frac{1}{a}$ 일 때,

최댓값 $4 + 2a - \frac{1}{a} = 3$ 을 가진다.

$4 + 2a - \frac{1}{a} = 3$ 에서 $2a - \frac{1}{a} + 1 = 0$

$2a^2 + a - 1 = 0$, $(a+1)(2a-1) = 0$

$\therefore a = -1$ 또는 $a = \frac{1}{2}$

$a = -1(\because\ a < 0)$

8. 두 점 $(2, 0)$, $(-2, 0)$ 을 지나는 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 는 $x = c$ 일 때, 최솟값 d 를 갖는다. 이 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

두 점 $(2, 0), (-2, 0)$ 을 지나므로
$y = x^2 + ax + b$ 는 y 축 대칭이다.
축이 $x = 0$에서 $a = 0$, $c = 0$, $b = d$
$(2, 0)$ 을 지나므로 $0 = 4 + b \quad \therefore b = -4 = d$
$\therefore a + b + c + d = 0 - 4 + 0 - 4 = -8$

9. 두 함수 $f(x) = x^2 - 2ax + b$, $g(x) = -x^2 + 4x + a + b$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값은 -1 , $g(x)$ 의 최댓값은 9 라고 할 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

① $\begin{cases} a = 3,\ b = -8 \\ a = 2,\ b = 3 \end{cases}$

② $\begin{cases} a = -2,\ b = 6 \\ a = 2,\ b = -3 \end{cases}$

③ $\begin{cases} a = -3,\ b = 8 \\ a = 2,\ b = 3 \end{cases}$

④ $\begin{cases} a = -1,\ b = 2 \\ a = 2,\ b = 3 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} a = -3,\ b = 8 \\ a = 1,\ b = 2 \end{cases}$

해설

$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + b$ 에서 $x = a$ 일 때, 최솟값은 $-a^2 + b = -1$ $\cdots$ ①

$g(x) = -(x-2)^2 + 4 + a + b$ 에서 $x = 2$ 일 때, 최댓값은 $4 + a + b = 9 \cdots$ ②

② 에서 $b = -a + 5$

이것을 ① 에 대입하면,

$-a^2 - a + 5 = -1,\ a^2 + a - 6 = 0$

$\therefore a = -3,\ a = 2$

즉 $a = -3$ 일 때, $b = 8$

$a = 2$ 일 때, $b = 3$

10. 임의의 실수 x 에 대하여 이차함수 $f(x)$ 가 다음을 만족할 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하면? $2f(x) - f(-x) = x^2 - 3x + 8$

① $\frac{27}{4}$ ② $\frac{29}{4}$ ③ $\frac{31}{4}$ ④ $\frac{33}{4}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

해설

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 라고 하면

$2(ax^2 + bx + c) - (ax^2 - bx + c) = x^2 - 3x + 8$

$\Rightarrow b = -1, c = 8, a = 1$

$\therefore\ f(x) = x^2 - x + 8 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{31}{4}$

$\Rightarrow$ 최솟값 : $\frac{31}{4}$

11. $a^2+b^2=5$인 관계에 있는 두 실수 a, b에 대하여 $f(x)=x^2-4ax+b^2$의 최솟값을 상수 k라 할 때, k의 최댓값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$$f(x) = x^2 - 4ax + b^2$$
$$= (x-2a)^2 + b^2 - 4a^2$$ 에서

$k = b^2 - 4a^2 = (5 - a^2) - 4a^2 = -5a^2 + 5$

∴ 따라서 k의 최댓값은 5

12. $0 \le x \le 3$ 에서 이차함수 $y = -4x^2 + 4x + a$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 10 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $\frac{11}{2}$ ② 11 ③ $\frac{33}{2}$ ④ 22 ⑤ $\frac{55}{2}$

해설

$y = -4x^2 + 4x + a = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a + 1$

$0 \le x \le 3$ 이므로 $x = \frac{1}{2}$ 일 때,
최댓값을 갖고 최댓값은 $a + 1$ 이다.
$x = 3$ 일 때, 최솟값을 갖고
최솟값은 $a - 24$ 이다.
최댓값과 최솟값의 합이 10 이므로
$(a + 1) + (a - 24) = 10$
$\therefore a = \frac{33}{2}$

13. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최소값은 ? (단, a 는 실수)

① 12　　② 9　　③ 6　　④ 3　　⑤ 2

해설

$x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 에서
근과 계수와의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = -2a,\ \alpha\beta = 9 - 2a^2$
$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 8a^2 - 18$
또 α, β 는 실근이므로 $\dfrac{D}{4} = a^2 - (9 - 2a^2) \geq 0$
$\therefore a^2 \geq 3$
따라서 $a^2 = 3$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 은 최소이고
최소값은 6 이다.

14. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax - 9 + 2a^2 = 0$ 이 실근 $\alpha,\ \beta$ 를 가질 때, $|\alpha - \beta|$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + 2ax - 9 + 2a^2 = 0$ 에서
근과 계수와의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = -2a,\ \alpha\beta = -9 + 2a^2$
$|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-2a)^2 - 4(-9 + 2a^2) = -4a^2 + 36$
그런데 $\frac{D}{4} = a^2 + 9 - 2a^2 \geq 0$
$\therefore\ -3 \leq a \leq 3$
$\therefore\ 0 \leq |\alpha - \beta|^2 \leq 36$
즉, $0 \leq |\alpha - \beta| \leq 6$
$\therefore$ (최댓값)$+$ (최솟값)$= 0 + 6 = 6$

15. x 의 값의 범위가 $x \geq 3$ 인 이차함수 $y = 2x^2 - 8kx$ 의 최솟값이 10 일 때, 상수 k 의 값은?

① -1　② $-\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{3}$　④ 1　⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$y = 2x^2 - 8kx = 2(x-2k)^2 - 8k^2$ 이
이참함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$(2k,\ -8k^2)$ 이다.

(i) $2k \geq 3$ 일 때, 꼭짓점의 x 좌표가 x 의 값의 범위에 속하므로 주어진 이차함수는 $x = 2k$ 일 때 최솟값을 갖는다. 최솟값이 10 이므로 $-8k^2 = 10$, $k^2 = -\frac{5}{4}$ 이 때, 실수 k 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $2k < 3$ 일 때 꼭짓점의 x 좌표가 x 의 값의 범위에 속하지 않으므로 주어진 이차함수는 $x = 3$ 일 때 최솟값을 갖는다. 최솟값이 10 이므로 $18 - 24k = 10$, $24k = 8$

$\therefore k = \frac{1}{3}$

16. $a-1 \le x \le a+4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4$ 의 최댓값이 4 일 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$f(x) = x^2 - 2ax + 4 = (x-a)^2 - a^2 + 4$
이때, 꼭짓점의 x 좌표 a 가 x의 값의 범위에 속하므로
$x = a$ 일 때 최솟값, $x = a + 4$ 일 때 최댓값을 갖는다.
즉, $f(a+4) = (a+4)^2 - 2a(a+4) + 4 = 4$
$a^2 + 8a + 16 - 2a^2 - 8a + 4 = 4$
$a^2 = 16$
$\therefore a = 4 \ (a > 0)$

17. x 에 대한 이차함수 $f(x)=x^2-2x-a^2+4a+3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

해설

$f(x)=x^2-2x-a^2+4a+3$
$=(x-1)^2-a^2+4a+2$
따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a)=-a^2+4a+2$
$g(a)=-(a-2)^2+6$ 에서
$g(a)$ 의 최댓값은 6 이다.

18. $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 최댓값은? (단, $0 \leq a \leq 2$)

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ $(0 \leq x \leq 3)$

$0 \leq \frac{a}{2} \leq 1$ 이므로

최솟값 $m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4}$,

최댓값 $M = f(3) = 9 - 3a$

$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a+6)^2 + 18$

이때, $0 \leq a \leq 2$ 이므로

$M + m$ 은 $a = 0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

19. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 2a - 1$의 최솟값을 m이라 할 때, m의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 2a - 1 = (x - a)^2 - a^2 + 2a - 1$
이므로 $x = a$일 때 최솟값 $-a^2 + 2a - 1$을 가진다.
$\therefore m = -a^2 + 2a - 1 = -(a - 1)^2$
따라서 m은 $a = 1$일 때, 최댓값 0을 가진다.

20. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 4a - 4$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

$y = -x^2 - 2ax + 4a - 4 = -(x+a)^2 + a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = -a$ 일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 4$ 를 가진다.
$\therefore M = a^2 + 4a - 4 = (a+2)^2 - 8$
따라서 M 은 $a = -2$ 일 때 최댓값 -8 을 가진다.