

1. 다음 마방진의 가로, 세로, 대각선의 곱이 모두 같아지도록 $3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^8, 3^9$ 을 빈 칸에 채워 넣었을 때, $(B - D) \times (C - A)$ 의 값을 구하여라.

A	3^7	
B		3
	C	D

▶ 답 :

▷ 정답 : 236196

해설

2	7	6	A (3^2)	3^7	3^6
9	5	1	B (3^9)	3^5	3
4	3	8	3^4	C (3^3)	D (3^8)

밑이 같은 거듭제곱의 곱은 지수끼리의 합과 같으므로 지수만으로 가로, 세로, 대각선의 합이 모두 같은 마방진을 먼저 만든다.
(왼쪽 마방진)

밑을 3으로 하고 지수를 왼쪽 마방진의 수를 그대로 사용하면 오른쪽과 같이 가로, 세로, 대각선의 곱이 모두 3^{15} 가 되는 표가 완성된다.

따라서 $A(3^2), B(3^9), C(3^3), D(3^8)$ 이다.

$$\begin{aligned}
 &\therefore (B - D) \times (C - A) \\
 &= (3^9 - 3^8) \times (3^3 - 3^2) \\
 &= (3 \times 3^8 - 3^8) \times (3 \times 3^2 - 3^2) \\
 &= (2 \times 3^8) \times (2 \times 3^2) \\
 &= 4 \times 3^{10} \\
 &= 236196
 \end{aligned}$$

2. $9^x = 4$ 일 때, $\frac{3^{2x}}{3^{4x} + 3^x}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{2}{9}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{1}{5}$

④ $\frac{5}{2}$

⑤ $\frac{9}{2}$

해설

$$9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = 4$$

따라서 $3^x = 2$ 이고, $3^{4x} = (3^x)^4 = 2^4 = 16$ 이다.

$$\therefore \frac{3^{2x}}{3^{4x} + 3^x} = \frac{4}{16 + 2} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

3. $3^{2x-3} \div 3^{x+1} = 243$ 에서 x 의 값은?

① 3

② 4

③ 6

④ 7

⑤ 9

해설

$$3^{2x-3-(x+1)} = 3^{x-4} = 3^5$$

$$\therefore x - 4 = 5 \quad \therefore x = 9$$

4. $243^5 \div 81^n = 27^3$ 일 때, n 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$(3^5)^5 \div 3^{4n} = 3^{25-4n} = 3^9$$

$$25 - 4n = 9$$

$$\therefore n = 4$$

5. 양의 정수 a, b, c 에 대하여 $(x^a y^b z^c)^d = x^6 y^{12} z^{18}$ 이 성립하는 가장 큰 양의 정수 d 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 12

⑤ 18

해설

$$(x^a y^b z^c)^d = x^{ad} y^{bd} z^{cd} = x^6 y^{12} z^{18}$$

$$ad = 6, bd = 12, cd = 18$$

d 는 6, 12, 18 의 최대공약수

$$\therefore d = 6$$

6. 다음 식을 만족하는 최대의 자연수 n 에 대하여, $n - a + 2b - c$ 의 값은?

$$(x^a y^b z^c)^n = x^{56} y^{64} z^{88}$$

① -2

② 0

③ 4

④ 6

⑤ 10

해설

56, 64, 88 의 최대공약수는 8 이다.

따라서 $n = 8$ 이고, $a = 7$, $b = 8$, $c = 11$ 이다.

그러므로 $n - a + 2b - c = 8 - 7 + 16 - 11 = 6$ 이다.

7. $20^a = 4$, $20^b = 3$ 일 때, $5^{\frac{a+b}{1-a}}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$5 = \frac{20}{4} = \frac{20}{20^a} = 20^{1-a}$$

$$5^{\frac{a+b}{1-a}} = (20^{1-a})^{\frac{a+b}{1-a}} = 20^{a+b} = 20^a \times 20^b = 4 \times 3 = 12$$

8. n 이 자연수일 때, $(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \cdots + (-1)^{2n-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$(\text{준식}) = (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots + (-1 + 1) - 1 = -1$$

9. $a = \frac{1}{2^{2x-1}}, b = \frac{1}{3^x}$ 일 때, 12^x 을 a, b 를 사용한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{2}{ab}$

해설

$12^x = (2^2 \times 3)^x = 2^{2x} \times 3^x$ 이므로 주어진 a, b 를 $2^{2x}, 3^x$ 으로 정리하면

$$2^{2x-1} = \frac{1}{a} \text{ 에서 } 2^{2x} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{a} \quad \therefore 2^{2x} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{1}{3^x} = b \text{ 에서 } \therefore 3^x = \frac{1}{b}$$

$$\therefore 12^x = 2^{2x} \times 3^x = \frac{2}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{2}{ab}$$

10. $77^{(7)^2}$ 의 일의 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

7의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1 이 계속 반복된다.

$77^{(7)^2} = 77^{49}$ 에서

7^{49} 의 일의 자리의 숫자는 $49 = 4 \times 12 + 1$ 이므로 7 이다.

$x = 7^{49}$ 일 때, 7^x 의 일의 자리의 숫자는 7^7 의 일의 자리의 숫자와 같으므로

$77^{(7)^2} = 77^{49}$ 의 일의 자리의 숫자는 $7 = 4 \times 1 + 3$ 이므로 3 이다.

11. 다음 식에서 $A + B + C$ 의 값은?

$$(-4x^3)^A \times 2xy^B \div (-2x^2y)^2 = 8x^Cy$$

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$(-4x^3)^A \times 2xy^B \div (-2x^2y)^2 = 8x^Cy$$

$$(-4)^A x^{3A} \times 2xy^B \div 4x^4y^2 = 8x^Cy$$

$$(-4)^A \times 2 \div 4 = 8 \quad \therefore A = 2$$

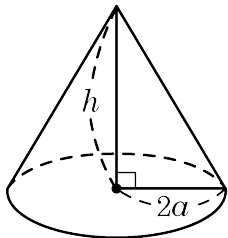
$$x^{3A} \times x \div x^4 = x^C$$

$$x^6 \times x \div x^4 = x^C \quad \therefore C = 3$$

$$y^B \div y^2 = y \quad \therefore B = 3$$

$$\therefore A + B + C = 2 + 3 + 3 = 8$$

12. 다음 그림은 부피가 $36a^2\pi$ 이고 밑면의 반지름의 길이가 $2a$ 인 원뿔이다. 원뿔의 높이 h 를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$\frac{1}{3} \times (\text{밑넓이}) \times (\text{높이}) = (\text{원뿔의부피})$ 이므로

$$\frac{1}{3} \times \pi \times (2a)^2 \times h = 36a^2\pi$$

$$\frac{4a^2\pi}{3} \times h = 36a^2\pi$$

$$\therefore h = 27$$

13. 어떤 식 A 에 $2x^2 - 5x + 7$ 을 빼야 할 것을 잘못하여 더하였더니, 답이 $7x^2 - 2x + 3$ 이 되었다. 바르게 계산한 답은?

① $5x^2 + 3x - 4$

② $5x^2 - 3x - 4$

③ $3x^2 - 2x + 17$

④ $3x^2 + 8x - 11$

⑤ $3x^2 - 12x + 3$

해설

$$\begin{aligned} A &= 7x^2 - 2x + 3 - (2x^2 - 5x + 7) \\ &= 5x^2 + 3x - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{바른계산}) &= 5x^2 + 3x - 4 - (2x^2 - 5x + 7) \\ &= 3x^2 + 8x - 11 \end{aligned}$$

14. $A = x^2 - 3x + 1$, $B = 3x^2 + 5$, $C = -2x^2 + 7x$ 일 때, $3(A+B) - 2C - (A-C)$ 의 x^2 의 계수를 a , x 의 계수를 b , 상수항을 c 라고 하자. $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 17

해설

$$\begin{aligned} & 3(A+B) - 2C - (A-C) \\ &= 3A + 3B - 2C - A + C \\ &= 2A + 3B - C \\ &= 2(x^2 - 3x + 1) + 3(3x^2 + 5) - (-2x^2 + 7x) \\ &= 13x^2 - 13x + 17 \\ &\therefore a = 13, b = -13, c = 17 \\ &\therefore a + b + c = 17 \end{aligned}$$

15. $(a, b, c, d) = ac - bd$ 로 정의할 때, 다음 식을 간단히 하여라. 이 때, x^2 의 계수를 A , y^2 의 계수를 B 라 할 때, $A + B$ 의 값을 구하여라.

$$(x, y, 2x, y-1) + (2x, 2y-x, -x, y) - (3x, y, y, 2+y)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

기호의 정의에 따라

$$\begin{aligned} & (x, y, 2x, y-1) + (2x, 2y-x, -x, y) - (3x, y, y, 2+y) \\ &= 2x^2 - y(y-1) + (-2x^2) - y(2y-x) - \{3xy - y(2+y)\} \\ &= 2x^2 - y^2 + y - 2x^2 - 2y^2 + xy - 3xy + 2y + y^2 \\ &= -2y^2 + 3y - 2 \end{aligned}$$

따라서 x^2 의 계수는 0 이므로 $A = 0$, y^2 의 계수는 -2 이므로 $B = -2$ 이다.

$$\therefore A + B = -2$$

16. 다음 표와 같은 네 종류의 직육면체를 이용하여 모서리의 길이가 $(2x + 3y)$ 인 정육면체를 만들려고 할 때, 입체도형 A, B, C, D 가 필요한 개수의 합을 구하여라.

입체도형	가로의 길이	세로의 길이	높이
A	x	x	x
B	x	x	y
C	x	y	y
D	y	y	y

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 125 개

해설

A 의 부피 : x^3

B 의 부피 : x^2y

C 의 부피 : xy^2

D 의 부피 : y^3

한 모서리가 $(2x + 3y)$ 인 정육면체의 부피는

$$(2x + 3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$$

따라서 입체도형 A, B, C, D 가 필요한 개수는 각각 8 개, 36 개, 54 개, 27 개이다.

$$\therefore 8 + 36 + 54 + 27 = 125(\text{개})$$

17. 자연수 x, y 에 대하여 xy 를 5 로 나누면 3 이 남고 y 를 5 로 나누면 3 이 남을 때, 자연수 x 를 5 로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

x 를 5 로 나누었을 때의 몫을 a , 나머지를 R , y 를 5 로 나누었을 때의 몫을 b 라고 하면

$$x = 5a + R, y = 5b + 3$$

$$\begin{aligned} xy &= (5a + R)(5b + 3) \\ &= 25ab + 15a + 5bR + 3R \\ &= 5(5ab + 3a + bR) + 3R \end{aligned}$$

이 때 $0 \leq R \leq 4$ 이므로 xy 를 5 로 나누었을 때의 나머지가 3 이 되려면 $R = 1$ 이 되어야 한다.

따라서 x 를 5 로 나누었을 때의 나머지는 1 이다.

18. $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ 일 때, $xy + yz + zx$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \text{ 이므로 } 5 = 1 - 2(xy + yz + zx)$$

$$\therefore (xy + yz + zx) = -2$$

19. $a^2 + 3ab + b^2 = 5, a^2 - ab + b^2 = 1$ 일 때, $\frac{(a+b)(a^2+b^2) - ab(a+b)}{3ab}$

의 값을 모두 구한 것은?

① $\pm \frac{1}{3}$

② ± 1

③ $\pm \frac{5}{3}$

④ $\pm \frac{2}{3}$

⑤ $\pm \frac{4}{3}$

해설

$$a^2 + 3ab + b^2 = 5 \dots \textcircled{㉠}$$

$$a^2 - ab + b^2 = 1 \dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} \text{ 을 하면 } ab = 1 \dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉢} \text{ 을 } \textcircled{㉠} \text{ 에 대입하면 } a^2 + b^2 = 2 \text{ 이므로 } a + b = \pm 2$$

$$\therefore \frac{(a+b)(a^2+b^2) - ab(a+b)}{3ab}$$

$$= \frac{(a+b)(a^2+b^2) - ab(a+b)}{3ab} = \pm \frac{2}{3}$$

20. $x = -3, y = 5$ 일 때, $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 900

해설

주어진 식을 간단히 하면

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2 \\&= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^4 + 2x^2y^2 - y^4 \\&= 4x^2y^2 = 4(xy)^2\end{aligned}$$

$xy = -15$ 이므로

$$\begin{aligned}\therefore (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2 &= 4(xy)^2 \\&= 4 \times (-15)^2 \\&= 900\end{aligned}$$

21. $a^2 - a + 1 = 0$ 일 때, $a^{2009} + \frac{1}{a^{2009}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$a^2 - a + 1 = 0 \text{ 이므로 } a^2 = a - 1 ,$$

$$\text{양변에 } a \text{ 를 곱하면 } a^3 = a^2 - a = -1 ,$$

$$\text{양변을 } a \text{ 로 나누면 } a + \frac{1}{a} = 1 , a^2 + \frac{1}{a^2} = 1 - 2 = -1 ,$$

$$a^{2009} = (a^3)^{669} \times a^2 = -a^2 ,$$

$$\therefore a^{2009} + \frac{1}{a^{2009}} = -\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 1$$

22. $x^2 - 8x + 1 = 0$ 일 때, $2x^2 + \frac{2}{x^2} + 4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 128

해설

$x^2 - 8x + 1 = 0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$x + \frac{1}{x} = 8$$

$$2x^2 + \frac{2}{x^2} + 4 = 2 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \right) = 2 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 \text{ 이므로}$$

$$2x^2 + \frac{2}{x^2} + 4 = 2 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = 2 \times 8^2 = 128$$

23. $x + y = 1$, $xy = -3$ 일 때, $x^4 + y^4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$x + y = 1$, $xy = -3$ 이므로

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\&= (1)^2 - 2 \times (-3) \\&= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore x^4 + y^4 &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \\&= (7)^2 - 2 \times (-3)^2 \\&= 31\end{aligned}$$

24. $(15x^2 + 9xy) \div 3x + (25y^2 - 5xy) \div 5y$ 를 간단히 하면?

① $4x + 8y$

② $8x + 4y$

③ $10x + 2y$

④ $10x + 8y$

⑤ $14y$

해설

$$(15x^2 + 9xy) \div 3x + (25y^2 - 5xy) \div 5y = 5x + 3y + 5y - x = 4x + 8y$$

25. 다음 식의 값을 구하면?

$$\frac{x^2yz - 2xy + xy^2z}{xyz} \quad (\text{단, } x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = 6)$$

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{6}$

④ $\frac{5}{6}$

⑤ 0

해설

$$\begin{aligned} \frac{x^2yz - 2xy + xy^2z}{xyz} &= \frac{x^2yz}{xyz} - \frac{2xy}{xyz} + \frac{xy^2z}{xyz} \\ &= x - \frac{2}{z} + y \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

26. 두 자연수 a, b 에 대하여 $x = a + b, y = a - b$ 이고 $x^2 + y^2 = 10$ 일 때, a, b 의 값을 구하여라.(단, $a > b$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 1$

해설

$x = a + b, y = a - b$ 를 $x^2 + y^2 = 10$ 식에 대입하면

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) = 10$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

따라서 $a^2 = 4, b^2 = 1$ 에서 $a = 2, b = 1$ 이다.

27. $A = x - 3y$, $B = -3x + 2y$ 일 때, $5A - [B - \{3A - (A - 2B)\}]$ 을 x , y 에 관한 식으로 나타내면?

① $4x + 19y$

② $4x - 19y$

③ $6x + 11y$

④ $6x - 11y$

⑤ $3x - y$

해설

$$5A - [B - \{3A - (A - 2B)\}] = 7A + B$$

$A = x - 3y$, $B = -3x + 2y$ 을 대입하면

$$7A + B = 7(x - 3y) + (-3x + 2y) = 7x - 21y - 3x + 2y = 4x - 19y$$

28. $\frac{2}{x} = \frac{1}{y}$ 일 때, $(10xy - 15y^2) \div 5y^2$ 의 값은?

① -5

② -3

③ -2

④ 1

⑤ 5

해설

$$(10xy - 15y^2) \div 5y^2 = \frac{2x}{y} - 3$$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{y} \text{ 은 } x = 2y \text{ 이므로 } \frac{4y}{y} - 3 = 1 \text{ 이다.}$$

29. 0이 아닌 세 수 x, y, z 에 대하여 $x : y : z = y + z : z + x : x + y$ 일 때,
 $\frac{(xy + yz + zx)(x + y + z)}{(x + y + z)^3}$ 의 값을 구하여라. (단, $x + y + z \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{3}$

해설

$x : y : z = y + z : z + x : x + y$ 이면

$$\frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = \frac{x+y}{z} \text{ 이다.}$$

$$\frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = \frac{x+y}{z}$$

의 세 변에 각각 1 씩 더하면

$$\frac{y+z}{x} + 1 = \frac{z+x}{y} + 1 = \frac{x+y}{z} + 1$$

$$\frac{x+y+z}{x} = \frac{x+y+z}{y} = \frac{x+y+z}{z}$$

x, y, z 는 0이 아니므로 $x + y + z \neq 0$

따라서 $x = y = z$

$$\therefore \frac{(xy + yz + zx)(x + y + z)}{(x + y + z)^3} = \frac{3x^2 \times 3x}{27x^3} = \frac{1}{3}$$

30. $x : y : z = 6 : 4 : 9$ 일 때, $\frac{x(xy + yz) + y(yz + zx) + z(zx + xy)}{xyz}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 정답: $\frac{79}{12}$

해설

$x : y : z = 6 : 4 : 9$ 에서

$x = 6k, y = 4k, z = 9k$ 라 하면,

$$\begin{aligned} & \frac{x(xy + yz) + y(yz + zx) + z(zx + xy)}{xyz} \\ &= \frac{x^2y + xyz + y^2z + xyz + xz^2 + xyz}{xyz} \\ &= \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + 3 \\ &= \frac{6k}{9k} + \frac{4k}{6k} + \frac{9k}{4k} + 3 = \frac{79}{12} \end{aligned}$$