

1. x 에 대한 이차방정식 $(m-1)x^2 - 2mx + (m+2) = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 m 의 값과 그 때의 중근을 α 라 할 때, $m + \alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $m \neq 1$ 이고, x 의 계수가 $2m$ 이므로

$$\frac{D}{4} = m^2 - (m-1)(m+2) = 0$$

정리하면, $-m+2=0 \quad \therefore m=2$

$m=2$ 를 준식에 대입하면

$$x^2 - 4x + 4 = 0, (x-2)^2 = 0$$

$\therefore x=2$ (중근 α)

$$\therefore m + \alpha = 2 + 2 = 4$$

2. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 &= (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 0 \\ \therefore x &= 2, y = 4 \\ \therefore x + y &= 6 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 &= 0 \text{이 실근을 가지므로} \\ D/4 &= 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0 \\ y^2 - 8y + 16 &\leq 0 \\ (y - 4)^2 &\leq 0, y = 4 \\ \text{준식에 대입하면 } x &= 2 \\ \text{따라서 } x + y &= 6 \end{aligned}$$

3. 이차방정식 $x^2 + 4x + k = 0$ 이 허근을 가지도록 상수 k 의 값의 범위를 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k > 4$

해설

$$\frac{D}{4} = 2^2 - k < 0$$

$$\therefore k > 4$$

4. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$ 이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D = 0$

$$D = (2m + a + b)^2 - 4(m^2 + ab) = 0$$

$$4m^2 + a^2 + b^2 + 4ma + 2ab + 4mb - 4m^2 - 4ab = 0$$

m 에 관해 식을 정리하면

$$(4a + 4b)m + (a^2 - 2ab + b^2) = 0$$

$$4a + 4b = 0, \quad a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$\therefore a + b = 0$$

5. 이차방정식 $(\sqrt{2}+1)x^2+x-\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$ 의 두 근의 곱은?

- ① $-\sqrt{2}$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{2}-1$ 을 곱하면
 $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=0$
 $x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$
 $(x+\sqrt{2})(x-1)$
 $\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=1$
따라서 두 근의 곱은 $-\sqrt{2}$

6. 이차방정식 $2x^2 - x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{5}{2}$

해설

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = -\frac{5}{2}$$

7. 이차방정식 $x^2 - x + 5 = 0$ 의 두근을 α, β 라 할때, $\alpha + 1$ 과 $\beta + 1$ 을 두근으로 하는 이차방정식을 구하면? (단, 최고차항의 계수는 1이다.)

① $x^2 + 3x - 7 = 0$

② $x^2 - 3x - 7 = 0$

③ $x^2 + 7x - 3 = 0$

④ $x^2 - 7x + 3 = 0$

⑤ $x^2 - 3x + 7 = 0$

해설

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 5$$

$$\text{두근의 합} : (\alpha + 1) + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 2 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{두근의 곱} : (\alpha + 1)(\beta + 1) &= \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 \\ &= 5 + 1 + 1 = 7 \end{aligned}$$

$$\therefore x^2 - 3x + 7 = 0$$

8. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 b 를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}, 4$ 를 얻었고, c 를 잘못 보아 $-1, 4$ 의 두 근을 얻었다. 이 때, 옳은 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

(i) b 를 잘못 본 경우
 a 와 c 는 옳으므로 두 근의 곱은
 $\frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{c}{a} \quad \therefore c = 2a$
(ii) c 를 잘못 본 경우
 a 와 b 는 옳으므로 두 근의 합은
 $-1 + 4 = 3 = -\frac{b}{a} \quad \therefore b = -3a$
(i), (ii)에서 주어진 방정식은
 $ax^2 - 3ax + 2a = 0$
 $a \neq 0$ 이므로 $x^2 - 3x + 2 = 0$
 $(x - 1)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$
따라서 근의 합은 3이다.

9. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 - i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

해설

다른 한 근은 복소수의 켤레근인 $1 + i$ 이므로
두 근의 합: $(1 + i) + (1 - i) = -a \quad \therefore a = -2$
두 근의 곱: $(1 + i)(1 - i) = b \quad \therefore b = 2$
 $\therefore a + b = -2 + 2 = 0$

10. a, b, c 는 실수이고, $a > 0, ac - b^2 > 0, b \neq 0$ 이라 할 때, x 의 이차방정식 $x^2 - (a + c)x + ac - b^2 = 0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?
- ① 서로 다른 두 개의 음의 근 ② 서로 다른 두 개의 양의 근
③ 양의 중근 ④ 음의 중근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$x^2 - (a + c)x + ac - b^2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = (a + c)^2 - 4(ac - b^2)$
 $= (a - c)^2 + 4b^2 > 0 \cdots \textcircled{1} (\because b \neq 0)$
 $a > 0, ac > b^2 > 0$ 에서 $c > 0$ 이므로
(두 근의 곱) $= ac - b^2 > 0 \cdots \textcircled{2}$
(두 근의 합) $= a + c > 0 \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 양의 근을 가진다.