

1. 등식 $x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$ 이 x 에 관한 항등식일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$$

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 2 = a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x = 0 \text{을 대입하면 } 3 = a - b + c \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 3 = a + b + c \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①을 ②, ③에 대입하여 정리하면

$$b - c = -1, b + c = 1$$

두 식을 연립하면 $b = 0, c = 1$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 0 + 1 = 5$$

2. x 에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$ 을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

- ① 0 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$ 을 전개하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면 $(4x^2-3x+1)^5=a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+\cdots+a_9x+a_{10}$ 과 같이 된다.

여기서 모든 계수들의 합 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ 을 구하려면 $x=1$ 을 대입하면 된다.

즉, $(4-3+1)^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

모든 계수들의 합은 $2^5=32$

3. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 5이고, $x - 2$ 로 나누면 나누어떨어진다고 한다. 이 때, $-3(m + n)$ 의 값은?

① 4

② 8

③ 12

④ 14

⑤ 18

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + mx^2 + nx + 1 \\ &= (x + 1)Q(x) + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + mx^2 + nx + 1 \\ &= (x - 2)Q'(x) \end{aligned}$$

$$\therefore f(-1) = -1 + m - n + 1 = 5$$

$$f(2) = 8 + 4m + 2n + 1 = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{6}, n = -\frac{29}{6}$$

$$\therefore m + n = -\frac{14}{3}, -3(m + n) = 14$$

4. 상수 a, b 에 대하여 다음 등식이 항상 성립할 때, $2a + b$ 의 값은?

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} = \frac{6(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

- ① 2 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

등식이 항상 성립하기 위해서는 (분모) $\neq 0$ 이어야 한다.
양변에 공통분모인 $(x-1)(x+3)$ 을 곱하면,
 $a(x+3) + b(x-1) = 6(x+1)$
 $(a+b)x + (3a-b) = 6x+6$
 $\therefore a+b=6, 3a-b=6$
두 식을 연립하여 풀면,
 $a=3, b=6-a=3$
 $\therefore 2a+b=2\times 3+3=9$

5. $\frac{2x+3a}{4x+1}$ 가 x 에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a = 2$

해설

$\frac{2x+3a}{4x+1} = k$ (일정값 $= k$)라 놓으면 $2x+3a = k(4x+1)$ 에서

$$(2-4k)x + 3a - k = 0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로,

$$2-4k = 0, 3a - k = 0$$

$$k = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } 3a = k \text{ 에서 } a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 12a = 2$$

6. $x-y=1$ 을 만족하는 임의의 실수 x, y 에 대하여 $ax^2+bx+cy^2-1=0$ 이 항상 성립할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$y = x - 1$ 을 준식에 대입하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $(a+b+c)x^2 - (b+2c)x + c - 1 = 0$
 x 에 대한 항등식이므로
 $a+b+c=0, b+2c=0, c-1=0$
 $\therefore a=1, b=-2, c=1$
 $\therefore a+b+c=0$

7. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4$ 로 나누었을 때의 나머지가 $-x + 4$ 이다. 다항식 $f(x + 1)$ 을 $x^2 + 2x - 3$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x + 1$

② $-x + 3$

③ $x - 1$

④ $2x$

⑤ $2x - 3$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4)P(x) - x + 4 \\ &= (x + 2)(x - 2)P(x) - x + 4 \\ \therefore f(-2) &= 6, f(2) = 2 \\ f(x + 1) &= (x^2 + 2x - 3)Q(x) + ax + b \\ &= (x + 3)(x - 1)Q(x) + ax + b \\ x = -3 \text{을 대입하면 } f(-2) &= -3a + b = 6 \\ x = 1 \text{을 대입하면 } f(2) &= a + b = 2 \\ \therefore a &= -1, b = 3 \\ \text{따라서 나머지는 } &-x + 3 \end{aligned}$$

8. $x^{113} + 1$ 을 $x^3 + x$ 로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라고 하자. 이때, $R(2006)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2007

해설

$$\begin{aligned}x^{113} + 1 &= (x^3 + x)Q(x) + R(x) \\ &= x(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c\end{aligned}$$

항등식이므로 $x = 0, x^2 = -1$ 을 각각 대입하면,

$$1 = c, \quad x + 1 = -a + bx + c$$

$$\therefore a = 0, \quad b = 1$$

$$\therefore R(x) = x + 1$$

$$\text{따라서 } R(2006) = 2007$$

9. 다항식 $x^{51} + 30$ 을 $x + 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하자. 이때, $Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^{51} + 30 = (x + 1)Q(x) + R$ 이라 하면

$x = -1$ 을 대입하면 $R = 29$

$x^{51} + 30 = (x + 1)Q(x) + 29$

$Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지는

$Q(1)$, $x = 1$ 식에 대입

$31 = 2Q(1) + 29$

$\therefore Q(1) = 1$

10. x 에 관한 항등식 $x^n(x^2+ax+b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$ 가 성립할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 5

해설

$x^n(x^2+ax+b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$
위의 식에 $x=2$ 를 대입하면, $2^n(4+2a+b) = 0$
 $\therefore b = -2a - 4 (2^n \neq 0) \dots \textcircled{1}$
①을 준식에 대입하면,
 $x^n(x^2+ax-2a-4) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$
 $x^n(x-2)(x+a+2) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$
위의 식이 항등식이므로 다음 식도 항등식이다.
 $x^n(x+a+2) = (x-2)p(x) + 2^n$
다시 $x=2$ 를 대입하면,
 $2^n(4+a) = 2^n \quad \therefore a = -3$
 $a = -3$ 을 ①에 대입하면,
 $b = (-2)(-3) - 4 = 2$
 $\therefore a = -3, b = 2$
 $\therefore a+b = -1$