

1. 등식  $x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$ 이  $x$ 에 관한 항등식일 때,  $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$x^2 - 2x + 3 = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$$

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 2 = a \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x = 0 \text{을 대입하면 } 3 = a - b + c \dots\dots \textcircled{2}$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 3 = a + b + c \dots\dots \textcircled{3}$$

①을 ②, ③에 대입하여 정리하면

$$b - c = -1, b + c = 1$$

$$\text{두 식을 연립하면 } b = 0, c = 1$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 0 + 1 = 5$$

2.  $x$ 에 대한 다항식  $(4x^2 - 3x + 1)^5$ 을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0

② 16

③ 32

④ 64

⑤ 1024

### 해설

$(4x^2 - 3x + 1)^5$ 을 전개하여  $x$ 에 대한 내림차순으로 정리하면  $(4x^2 - 3x + 1)^5 = a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + \cdots + a_9x + a_{10}$ 과 같이 된다.

여기서 모든 계수들의 합

$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ 을 구하려면

$x = 1$ 을 대입하면 된다.

즉,  $(4 - 3 + 1)^5 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$

모든 계수들의 합은  $2^5 = 32$

3.  $x$ 에 관한 삼차식  $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을  $x+1$ 로 나누면 나머지가 5이고,  $x-2$ 로 나누면 나누어떨어진다고 한다. 이 때,  $-3(m+n)$ 의 값은?

① 4

② 8

③ 12

④ 14

⑤ 18

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + mx^2 + nx + 1 \\ &= (x+1)Q(x) + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + mx^2 + nx + 1 \\ &= (x-2)Q'(x) \end{aligned}$$

$$\therefore f(-1) = -1 + m - n + 1 = 5$$

$$f(2) = 8 + 4m + 2n + 1 = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{6}, n = -\frac{29}{6}$$

$$\therefore m + n = -\frac{14}{3}, -3(m+n) = 14$$

4. 상수  $a, b$ 에 대하여 다음 등식이 항상 성립할 때,  $2a + b$ 의 값은?

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} = \frac{6(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

① 2

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

### 해설

등식이 항상 성립하기 위해서는 (분모)  $\neq 0$ 이어야 한다.

양변에 공통분모인  $(x-1)(x+3)$ 을 곱하면,

$$a(x+3) + b(x-1) = 6(x+1)$$

$$(a+b)x + (3a-b) = 6x+6$$

$$\therefore a+b=6, 3a-b=6$$

두 식을 연립하여 풀면,

$$a=3, b=6-a=3$$

$$\therefore 2a+b=2 \times 3+3=9$$

5.  $\frac{2x+3a}{4x+1}$ 가  $x$ 에 관계없이 일정한 값을 가질 때,  $12a$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▶ 정답 :  $12a = 2$

해설

$$\frac{2x+3a}{4x+1} = k \text{ (일정값} = k \text{)} \text{라 놓으면 } 2x+3a = k(4x+1) \text{에서}$$

$$(2-4k)x + 3a - k = 0$$

이 식은  $x$ 에 대한 항등식이므로,

$$2-4k = 0, 3a - k = 0$$

$$k = \frac{1}{2} \text{이므로 } 3a = k \text{에서 } a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 12a = 2$$

6.  $x-y=1$ 을 만족하는 임의의 실수  $x, y$ 에 대하여  $ax^2 + bxy + cy^2 - 1 = 0$ 이 항상 성립할 때,  $a + b + c$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$y = x - 1$ 을 준식에 대입하여  $x$ 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$(a + b + c)x^2 - (b + 2c)x + c - 1 = 0$$

$x$ 에 대한 항등식이므로

$$a + b + c = 0, \quad b + 2c = 0, \quad c - 1 = 0$$

$$\therefore a = 1, \quad b = -2, \quad c = 1$$

$$\therefore a + b + c = 0$$

7. 다항식  $f(x)$ 를  $x^2 - 4$ 로 나누었을 때의 나머지가  $-x + 4$ 이다. 다항식  $f(x + 1)$ 을  $x^2 + 2x - 3$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

①  $2x + 1$

②  $-x + 3$

③  $x - 1$

④  $2x$

⑤  $2x - 3$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4)P(x) - x + 4 \\ &= (x + 2)(x - 2)P(x) - x + 4 \end{aligned}$$

$$\therefore f(-2) = 6, f(2) = 2$$

$$\begin{aligned} f(x + 1) &= (x^2 + 2x - 3)Q(x) + ax + b \\ &= (x + 3)(x - 1)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

$$x = -3 \text{을 대입하면 } f(-2) = -3a + b = 6$$

$$x = 1 \text{을 대입하면 } f(2) = a + b = 2$$

$$\therefore a = -1, b = 3$$

따라서 나머지는  $-x + 3$

8.  $x^{113} + 1$ 을  $x^3 + x$ 로 나누었을 때, 몫을  $Q(x)$ , 나머지를  $R(x)$ 라고 하자. 이때,  $R(2006)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2007

해설

$$\begin{aligned}x^{113} + 1 &= (x^3 + x)Q(x) + R(x) \\ &= x(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c\end{aligned}$$

항등식이므로  $x = 0, x^2 = -1$ 을 각각 대입하면,

$$1 = c, \quad x + 1 = -a + bx + c$$

$$\therefore a = 0, \quad b = 1$$

$$\therefore R(x) = x + 1$$

$$\text{따라서 } R(2006) = 2007$$

9. 다항식  $x^{51} + 30$  을  $x + 1$  로 나누었을 때의 몫을  $Q(x)$  라 하자. 이때,  $Q(x)$  를  $x - 1$  로 나눈 나머지를 구하면?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$$x^{51} + 30 = (x + 1)Q(x) + R \text{ 이라 하면}$$

$$x = -1 \text{ 을 대입하면 } R = 29$$

$$x^{51} + 30 = (x + 1)Q(x) + 29$$

$Q(x)$  를  $x - 1$  로 나눈 나머지는

$Q(1)$ ,  $x = 1$  식에 대입

$$31 = 2Q(1) + 29$$

$$\therefore Q(1) = 1$$

10.  $x$ 에 관한 항등식  $x^n(x^2 + ax + b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$ 가 성립할 때,  $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1

② -1

③ 2

④ -2

⑤ 5

### 해설

$$x^n(x^2 + ax + b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$$

위의 식에  $x = 2$ 를 대입하면,  $2^n(4 + 2a + b) = 0$

$$\therefore b = -2a - 4(2^n \neq 0) \cdots \textcircled{1}$$

①을 준식에 대입하면,

$$x^n(x^2 + ax - 2a - 4) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$$

$$x^n(x-2)(x+a+2) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$$

위의 식이 항등식이므로 다음 식도 항등식이다.

$$x^n(x+a+2) = (x-2)p(x) + 2^n$$

다시  $x = 2$ 를 대입하면,

$$2^n(4+a) = 2^n \quad \therefore a = -3$$

$a = -3$ 을 ①에 대입하면,

$$b = (-2)(-3) - 4 = 2$$

$$\therefore a = -3, b = 2$$

$$\therefore a + b = -1$$