1. 다음 x, y의 다항식 P, Q에 대해 $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$를 계산하면, 항의 개수는 (㉠)개이고, 계수의 총합은 (㉡)이다. ㉠, ㉡에 알맞은 수를 차례로 써라.

$$\mathrm{P} = 5x^2y + 2y^2 + 2x^3$$
$$\mathrm{Q} = x^3 - 3y^2 + 2xy^2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠ 4

▷ 정답 : ㉡ 9

해설

동류항끼리 정리하면
$\mathrm{P}+\mathrm{Q} = 3x^3 + 5x^2y + 2xy^2 - y^2$
항의 개수는 4개이고 계수의 총합은 9이다.

2. 두 다항식 A, B에 대하여 $A+3B=2x^2-7x-1$, $B-A=2x^2-5x-7$ 일 때, $A+B$는?

① $-x+3$ ② $x-3$ ③ x^2+x+3
④ x^2-x-3 ⑤ x^2-x+3

해설

$A=-x^2+2x+5$, $B=x^2-3x-2$
$A+B=(-x^2+2x+5)+(x^2-3x-2)=-x+3$

해설

$\begin{cases} A+3B=2x^2-7x-1 \\ B-A=2x^2-5x-7 \end{cases}$

3. $(-1)^n + (-1)^{n+1}$ 의 값은? (n은 자연수)

① 0 ② -1 ③ 1 ④ -2 ⑤ 2

해설

$n = 2k$: $(-1)^n + (-1)^{n+1}$
$= (-1)^{2k} + (-1)^{2k+1}$
$= 0$
$n = 2k - 1$: $(-1)^n + (-1)^{n+1}$
$= (-1)^{2k-1} + (-1)^{2k}$
$= 0$

해설

n = 홀수일때, $n + 1$ = 짝수,
$(-1)^n + (-1)^{n+1} = -1 + 1 = 0$
n = 짝수일때, $n + 1$ = 홀수,
$(-1)^n + (-1)^{n+1} = 1 + (-1) = 0$

4. 다항식 $f(x)=3x^3-7x^2+5x+2$를 $3x-1$로 나눌 때의 몫과 나머지를 구하면?

① 몫 : x^2-2x+1 , 나머지 : 3

② 몫 : x^2-2x+1 , 나머지 : 2

③ 몫 : x^2+2x+1 , 나머지 : 3

④ 몫 : x^2+2x+1 , 나머지 : 2

⑤ 몫 : x^2+2x+1 , 나머지 : 1

해설

직접나누는 방법과 조립제법을 이용하여 구하는 방법이 있다.
$f(x)=(3x-1)\left(x^2-2x+1\right)+3$
$\therefore$ 몫 : x^2-2x+1, 나머지 : 3

5. 다음 중 다항식의 사칙연산이 잘못된 것은?

① $(4x-2)+(7-2x)=2x-5$

② $(x^2+2y^2)-2(y^2-3x^2)=7x^2$

③ $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

④ $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

⑤ $(x^3+1)\div(x+1)=x^2-x+1$

해설

① $(4x-2)+(7-2x)=2x+5$

6. 다항식 $(5x^2+3x+1)^2$을 전개하였을 때, x^2의 계수는?

① 10 ② 13 ③ 16 ④ 19 ⑤ 25

해설

$(5x^2+3x+1)(5x^2+3x+1)$에서

ⅰ) (일차항)×(일차항)의 경우 $9x^2$

ⅱ) (이차항)×(상수항)의 경우 $2\times 5x^2$

즉, $5x^2+5x^2+9x^2=19x^2$

∴ 19

7. 다음 식이 x에 대한 항등식이 되도록 A, B의 값을 정할 때, $A+B$의 값을 구하여라.

$$4x-6=A(x+1)-B(x-1)$$

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

x에 대한 항등식이므로 x의 값에 관계없이 항상 성립한다.
따라서 $x=-1$을 양변에 대입하면,
$4\times(-1)-6=A(-1+1)-B(-1-1)$
$-10=2B \quad \therefore\ B=-5$
또, $x=1$을 양변에 대입하면,
$4\times1-6=A(1+1)-B(1-1)$
$-2=2A \quad \therefore\ A=-1$
$\therefore\ A=-1,\ B=-5$
$\therefore\ A+B=-6$

해설

우변을 전개해서 내림차순으로 정리하면,
$4x-6=(A-B)x+A+B$
$\therefore A+B=-6$

8. 다항식 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$를 일차식 $x + 1$로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① -10 ② 10 ③ -4 ④ 4 ⑤ 0

해설

$f(x) = (x+1)Q(x) + R$이라고 놓으면
$f(-1) = R$
$\therefore\ f(-1) = -1 - 2 - 3 - 4 = -10$
따라서 $R = -10$

9. $f(x) = 2x^3 - 2x + k$가 $x - 2$로 나누어 떨어질 때, k의 값은?

① 0 ② 1 ③ −8 ④ −10 ⑤ −12

해설

$f(x) = 2x^3 - 2x + k$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지면
나머지정리에 의해 $f(2) = 16 - 4 + k = 0$
$\therefore\ k = -12$

10. 다항식 $ax+ay-bx-by$를 인수분해 하면?

① $x(a-b)$　② $(a-b)(x-y)$　③ $(a+b)(x-y)$

④ $(a-b)(x+y)$　⑤ $(a+b)(x+y)$

해설

$ax+ay-bx-by=a(x+y)-b(x+y)$
$=(a-b)(x+y)$

11. 다음 중 다항식의 전개가 잘못된 것은?

① $(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$

② $(a+2b-3c)^2=a^2+4b^2+9c^2+4ab-12bc-6ac$

③ $(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+8$

④ $(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)=x^4-x^2y^2+y^4$

⑤ $(x-1)^2(x+1)^2=x^4-2x^2+1$

해설

④ $(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$
$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$
$=x^4+x^2y^2+y^4$

12. $\dfrac{2x+1}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$가 $x\neq 1$인 모두 실수 x에 대해 항상 성립 하도록 $a,\ b,\ c$를 구할 때, $a+b+c$의 값은?

① 2 ② -2 ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$$\frac{a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)}{x^3-1}$$

$$=\frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$$

$$\therefore\ \frac{2x+1}{x^3-1}=\frac{(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)}{x^3-1}$$

분자의 계수를 비교하면

$a+b=0,\ a-b+c=2,\ a-c=1$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1,\ c=0$

$\therefore a+b+c=0$

13. x에 대한 항등식 $x^2-2x+3=a+b(x-1)+cx(x-1)$에서 a,b,c의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a=2$

▷ 정답: $b=-1$

▷ 정답: $c=1$

해설

계수비교법에 의하여

$x^2-2x+3=a+b(x-1)+cx(x-1)$

$=cx^2+(b-c)x+a-b$

$x^2-2x+3=cx^2+(b-c)x+a-b$에서

$c=1,\ b-c=-2,\ a-b=3$

연립하여 풀면

$\therefore\ a=2,\ b=-1,\ c=1$

14. 등식 $2x^2-3x-2=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$가 x값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a+b+c$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

양변에 $x=0$을 대입하면
$-2=2a \quad \therefore a=-1$
양변에 $x=1$을 대입하면
$-3=-b \quad \therefore b=3$
양변에 $x=2$를 대입하면
$0=2c \quad \therefore c=0$
$\therefore a+b+c=2$

15. $2x^2-3x-2=a(x-1)(x+2)+bx(x+2)+cx(x-1)$이 x에 대한 항등식이 되도록 a, b, c의 값을 정하면?

① $a=1,\ b=-1,\ c=2$　② $a=-1,\ b=1,\ c=-2$

③ $a=1,\ b=1,\ c=2$　④ $a=-1,\ b=-1,\ c=-2$

⑤ $a=1,\ b=-1,\ c=-2$

해설

수치대입법을 이용한다.

$x=0$을 대입 $-2=-2a$ $\therefore\ a=1$

$x=1$을 대입 $-3=3b$ $\therefore\ b=-1$

$x=-2$를 대입 $12=6c$ $\therefore\ c=2$

16. 다항식 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$을 $x-2$, $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 각각 a, b라 할 때, $a+b$의 값은?

① -8 ② -2 ③ -16 ④ 4 ⑤ 2

해설

$f(x) = (x-2)Q(x) + a$
$f(x) = (x-1)Q'(x) + b$
$f(2) = 4 = a,\ f(1) = -2 = b$
$\therefore a + b = 2$

17. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$㉠
$(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하면,
$m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{13}{3}$
$\therefore\ m-n=5$

18. x^3 의 항의 계수가 1 인 삼차 다항식 $P(x)$ 가 $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ 을 만족할 때, $P(4)$ 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

인수정리에 의해

$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

$P(4) = 3 \times 2 \times 1 = 6$

19. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx - 1$이 $x^2 - 3x + 2$로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ 로 놓으면
$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$, $x-2$ 로 나누어 떨어진다.
$f(1) = 1 + a + b - 1 = 0$ 즉, $a + b = 0 \cdots$㉠
$f(2) = 8 + 4a + 2b - 1 = 0$ 즉, $4a + 2b = -7 \cdots$㉡
㉠, ㉡으로부터 $a = -\frac{7}{2}$, $b = \frac{7}{2}$
$\therefore a + b = 0$

20. 다음 중 $a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c$의 인수인 것은?

① $a - b + c$　② $c - a$　③ $b + c$

④ $a - b$　⑤ $c - b + a$

해설

$$\begin{aligned} a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c &= a^3 - ab^2 + a^2c - b^2c \\ &= a(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)c \\ &= (a - b)(a + b)(a + c) \end{aligned}$$

21. $(a-b+c)(a+b-c)$를 전개한 식은?

① $a^2+b^2+c^2-2bc$ ② $a^2-b^2+c^2-2bc$

③ $a^2-b^2-c^2+2bc$ ④ $a^2+b^2-c^2-2bc$

⑤ $a^2+b^2+c^2+2bc$

해설

$$\begin{aligned}&(a-b+c)(a+b-c)\\&=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}\\&=a^2-(b-c)^2\\&=a^2-b^2-c^2+2bc\end{aligned}$$

22. $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b의 값은?

① $a=12,\ b=9$　② $a=-12,\ b=9$

③ $a=12,\ b=-9$　④ $a=-12,\ b=-9$

⑤ $a=9,\ b=12$

해설

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$으로 놓으면
이 식의 우변은
$x^4+2x^2(px+q)+(px+q)^2$
$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$
좌변과 계수를 비교하면
$2p=4,\ p^2+2q=-2$
$p=2,\ q=-3$에서
$a=2pq=-12,\ b=q^2=9$

23. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2\\ &= (x^2+3x)+(2x+6)\\ &= x^2+(3x+2x)+6\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

① 교환법칙, 결합법칙

② 교환법칙, 분배법칙

③ 분배법칙, 결합법칙

④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙

⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 \quad (\text{분배})\\ &= (x^2+3x)+(2x+6) \quad (\text{분배})\\ &= x^2+(3x+2x)+6 \quad (\text{결합})\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

24. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+2 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지가 $x+3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-6$

해설

검산식을 사용

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)\cdot A+(x+3)$

$A=(x+p)$

$x^3+ax^2+bx+2-(x+3)=(x^2-x+1)(x+p)$

$x^3+ax^2+(b-1)x-1=(x^2-x+1)(x-1)\ \therefore p=-1$

우변을 정리하면

$\therefore\ a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

25. $P=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$ ② $2^{32}+1$ ③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$ ⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$ 을 곱해도 식은 성립하므로

$$\begin{aligned}P&=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\&=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\&=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\&=\quad\vdots\\&=(2^{16}-1)(2^{16}+1)\\&=2^{32}-1\end{aligned}$$

26. $(x^3-x^2-2x+1)^5=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{15}(x-1)^{15}$일 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{14}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{15}\cdots$㉠

양변에 $x=2$를 대입하면

$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{15}\cdots$㉡

㉠ + ㉡을 하면

$2=2\left(a_0+a_2+\cdots+a_{14}\right)$이다.

$\therefore\ a_0+a_2+\cdots a_{14}=1$

27. 다음 중 $x^4-4x^3-7x^2+34x-24$를 인수분해 하였을 때, 인수가 아닌 것은?

① $x-1$ ② $x-2$ ③ $x+3$ ④ $x+4$ ⑤ $x-4$

해설

$f(x)=x^4-4x^3-7x^2+34x-24$라 하면
$f(1)=f(2)=0$이므로
$f(x)$는 $x-1, x-2$를 인수로 갖는다.
조립제법을 해 보면 즉,
$x^4-4x^3-7x^2+34x-24$
$=(x-1)(x-2)(x^2-x-12)$
$=(x-1)(x-2)(x-4)(x+3)$

28. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

29. $2x^2+xy-y^2+10x+4y+12$를 x, y의 두 일차식의 곱으로 인수분해하면, $(x+ay+b)(2x+cy+d)$가 된다고 할 때, $a+b+c+d$의 값은? (단, a, b, c, d는 상수)

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

$2x^2+xy-y^2+10x+4y+12$ ($\leftarrow$ x에 관하여 정리)
$=2x^2+(y+10)x-(y^2-4y-12)$
$=2x^2+(y+10)x-(y+2)(y-6)$
$=\{x+(y+2)\}\{2x-(y-6)\}$
$=(x+y+2)(2x-y+6)$
$\therefore\ a=1,\ b=2,\ c=-1,\ d=6$
$\therefore\ a+b+c+d=8$

30. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c)+(c+a)(c-a)$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형
④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c)$
$= b(b+2c)+(c+a)(c-a)$에서
$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\} = b^2+2bc+c^2-a^2$
$a^2-b^2+2bc-c^2 = -a^2+b^2+c^2+2bc$
$2a^2 = 2b^2+2c^2$
$\therefore\ a^2 = b^2+c^2$
따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

31. $x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$을 이용하여 다음 식의 값을 구하면?

$$\frac{(11^4+324)(23^4+324)(35^4+324)(47^4+324)}{(5^4+324)(17^4+324)(29^4+324)(41^4+324)}$$

① 192 ② 193 ③ 194 ④ 195 ⑤ 196

해설

$x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$

$=\{(x-y)^2+y^2\}\{(x+y)^2+y^2\}$ 이고,

$324=4\times3^4$ 이므로

$11^4+324=(11^2-2\times11\times3+2\times3^2)(11^2+2\times11\times3+2\times3^2)$

$=\{(11-3)^2+3^2\}\{(11+3)^2+3^2\}$

$=(8^2+3^2)(14^2+3^2)$

따라서 차례대로 모두 정리해 보면 주어진 식은

$$\frac{\{(8^2+3^2)(14^2+3^2)\}\{(20^2+3^2)(26^2+3^2)\}}{\{(2^2+3^2)(8^2+3^2)\}\{(14^2+3^2)(20^2+3^2)\}}$$
$$\frac{\{(32^2+3^2)(38^2+3^2)\}\{(44^2+3^2)(50^2+3^2)\}}{\{(26^2+3^2)(32^2+3^2)\}\{(38^2+3^2)(44^2+3^2)\}}$$

$$=\frac{50^2+3^2}{2^2+3^2}=\frac{2509}{13}=193$$

32. 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $[a,\ b,\ c] = a^2 + bc$라 하고 $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 + z^2 = 12$일 때, $[x,\ 2y,\ z] + [y,\ 2z,\ x] + [z,\ 2x,\ y]$의 값은?

① 10 ② 22 ③ 88 ④ 100 ⑤ 144

해설

$$\begin{aligned}
&[x,\ 2y,\ z] + [y,\ 2z,\ x] + [z,\ 2x,\ y] \\
&= x^2 + 2yz + y^2 + 2zx + z^2 + 2xy \\
&= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\
&= (x + y + z)^2 = 100
\end{aligned}$$