1. 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+a^2+b-2=0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\frac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2+a^2+b-2)=0$

$\therefore\ -2ka-b+2=0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a=0,\ b=2$

$\therefore\ a+b=2$

2. 이차방정식 $2x^2 - 6x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $2x^2 - 6x + 1 = 0$
② $x^2 - 6x + 1 = 0$
③ $x^2 - 7x + 3 = 0$
④ $2x^2 + 6x - 1 = 0$
⑤ $2x^2 - 7x + 3 = 0$

해설

근과 계수의 관계에서

$\alpha + \beta = \frac{6}{2} = 3$, $\alpha\beta = \frac{1}{2}$ 이므로

3 과 $\frac{1}{2}$을 이용한 근과 계수의 관계를 구해보면

$3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\therefore\ x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$

$\therefore\ 2x^2 - 7x + 3 = 0$

3. 이차식 x^2+2x+4 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$
② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$
③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$
④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$
⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2+2x+4=0$ 의 해를 구하면
$x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$
$\therefore x^2+2x+4$
$=\left\{x-(-1+3\sqrt{i}\right\}\left\{x-(-1-\sqrt{3}i)\right\}$
$=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

4. 다음 세 개의 3차방정식의 공통근을 구하여라.

$$x^3+3x^2-x-3=0,\ x^3+2x^2-x-2=0,$$
$$x^3-4x^2+5x-2=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

제 1식에서 $(x-1)(x+1)(x+3)=0$

$\therefore\ \ x=1,\ -1,\ -3$

제 2식에서 $(x-1)(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ \ x=1,\ -1,\ -2$

제 3식에서 $(x-1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ 1,\ 2$

$\therefore$공통근 : $x=1$

5. 사차방정식 $x^4-11x^2+30=0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, a^2+b^2의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^4-11x^2+30=0$
$(x^2-5)(x^2-6)=0$
$\therefore\ x=\pm\sqrt{5},\ x=\pm\sqrt{6}$
가장 작은 근 $a=-\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b=\sqrt{6}$
$\therefore\ a^2+b^2=6+6=12$

6. 연립방정식 $\begin{cases} x+y+z=4 & \cdots\cdots ① \\ x-y-2z=3 & \cdots\cdots ② \\ x+2y-3z=-1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y,\ z$를 순서대로 구하면?

① $-1, 0, 1$　② $5, -1, 1$　③ $4, 0, 1$
④ $4, -1, 1$　⑤ $4, -1, 3$

해설
① − ② 에서 $2y+3z=1 \cdots\cdots$ ④
② − ③ 에서 $-3y+z=4 \cdots\cdots$ ⑤
④ − ⑤ × 3에서 $y=-1$을 ⑤에 대입하면 $z=1$
또, $y=-1,\ z=1$ 을 ①에 대입하면 $x=4$
$\therefore\ x=4,\ y=-1,\ z=1$

7. 부등식 $ax-b^2 > bx+a^2-8$의 해가 모든 실수이기 위한 a 의 조건은? (a, b는 실수)

① $a=b$이고 $-1<a<1$
② $a=b$이고 $-2<a<2$
③ $a=b$이고 $-3<a<3$
④ $a=b$이고 $-4<a<4$
⑤ $a=b$이고 $-5<a<5$

해설

$ax-b^2 > bx+a^2-8$에서
$(a-b)x-b^2-a^2+8>0$이 모든 x에 대해서 성립해야 하므로
$a=b$
$\therefore -2a^2+8>0 \quad 2a^2<8$
$\therefore a^2<4$ 이므로 $-2<a<2$
즉 $a=b$ 이고 $-2<a<2$

8. 다음 부등식을 동시에 만족하는 정수 x의 개수는?

$$x^2 < 3x + 40 \ , \ 3x^2 - 7x \geq 40$$

① 4개　② 5개　③ 6개　④ 7개　⑤ 8개

해설

$x^2 < 3x + 40$,　$x^2 - 3x - 40 < 0$,
$(x-8)(x+5) < 0$,　$-5 < x < 8$
$3x^2 - 7x \geq 40$,　$3x^2 - 7x - 40 \geq 0$
$(3x+8)(x-5) \geq 0$,
$x \geq 5$ 또는 $x \leq -\frac{8}{3} \rightarrow$
공통범위는 $-5 < x \leq -\frac{8}{3}$,　$5 \leq x < 8$
정수는 -4, -3, 5, 6, 7 : 5개이다.

9. $x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, y = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}$ 의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ -2　　④ 3　　⑤ -4

해설

$$x + y = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} + \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = 1$$

$$xy = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) = \frac{1-(-3)}{4} = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} &= \frac{x^3+y^3}{xy} \\ &= \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{xy} \\ &= -2\end{aligned}$$

10. 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{-2}-\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$ 을 간단히 하여 $a+bi$ 의 꼴로 나타낼 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12\sqrt{2}$

해설

$\sqrt{-3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{-2}-\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$

$=(\sqrt{-3}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{-2})-\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$

$=\sqrt{-6}\times\sqrt{-6}-\sqrt{-2}-\sqrt{-2}$

$=-\sqrt{36}-\sqrt{2}i-\sqrt{2}i=-6-2\sqrt{2}i$

$\therefore\ ab=12\sqrt{2}$

11. 이차방정식 $x^2-4|x|-5=0$의 두 근의 곱은?

① -5　② -10　③ -15　④ -20　⑤ -25

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때,
$x^2-4x-5=(x-5)(x+1)=0$
$\therefore x=5$
ⅱ) $x<0$일 때,
$x^2+4x-5=(x+5)(x-1)=0$
$\therefore x=-5$
ⅰ), ⅱ)에서 두 근의 곱은 -25이다.

12. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서
$x^2-2x=t$ 로 놓으면
$t(t-2)-3=0$,
$t^2-2t-3=0$
$(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$
(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$\therefore\ x=1$ (중근)
따라서, $-1\times3\times1=-3$

13. 연립방정식 $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 + 2xy + y^2 \quad = 1 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x - 3$을 이차식에 대입하면
$x^2 + 2x(x - 3) + (x - 3)^2 = 1$
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$\therefore \; x = 1, 2$
(i) $x = 1$일 때 $y = -2$
(ii) $x = 2$일 때 $y = -1$
따라서 $xy = -2$

14. 연립방정식 $xy = z$, $yz = x$, $zx = y$를 만족하는 0이 아닌 실수해 x, y, z의 쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 4개　④ 8개　⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$

$xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$

여기에 $xy = z$를 대입하면 $z^2 = 1$, $z = \pm 1$

(i) $z = 1$을 주어진 연립방정식에 대입하면,

$xy = 1$, $x = y$

$\therefore$ $(x, y, z) = (1, 1, 1), (-1, -1, 1)$

(ii) $z = -1$을 주어진 연립방정식에 대입하면

$xy = -1$, $x = -y$

$\therefore$ $(x, y, z) = (1, -1, -1), (-1, 1, -1)$

(i), (ii)에서 조건을 만족하는 (x, y, z)는 모두 4개이다.

15. 학교운동장에 길이가 $70\,\mathrm{m}$ 인 줄을 가지고 다음 그림과 같은 직사각형 모양의 경계선을 표시하려고 한다. 이 때, 바깥 직사각형의 넓이가 $80\,\mathrm{m}^2$ 이 되도록 하는 바깥 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 합은? (단, 가로의 길이는 $10\,\mathrm{m}$ 이하이다.)

① $16\,\mathrm{m}$ ② $17\,\mathrm{m}$ ③ $18\,\mathrm{m}$ ④ $19\,\mathrm{m}$ ⑤ $20\,\mathrm{m}$

해설

운동장의 가로를 x , 세로를 y 라 하자.

$3x + 5y = 70$

$xy = 80$ 연립하여 풀면, $x = 10,\ y = 8$

$\therefore$ 가로+세로$= 18$

16. 이차부등식 $(k+1)x^2 - kx + 1 < 0$을 만족하는 실수 x가 존재하지 않도록 하는 정수 k의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

$f(x) = (k+1)x^2 - kx + 1$
$f(x) < 0$을 만족하는 실수 x가 존재하지 않으면
모든 x에 대해 $f(x) \geq 0$
$(k+1)x^2 - kx + 1 \geq 0$
ⅰ) $k+1 > 0$에서 $k > -1$
ⅱ) $D = k^2 - 4(k+1) \leq 0$
$k^2 - 4k - 4 \leq 0$
$2 - 2\sqrt{2} \leq k \leq 2 + 2\sqrt{2}$
ⅰ), ⅱ)의 공통범위는 $2 - 2\sqrt{2} \leq k \leq 2 + 2\sqrt{2}$
정수 k : 0, 1, 2, 3, 4 (5개)

17. x에 관한 이차부등식 $x^2-(a-6)x+a-3 \le 0$을 만족하는 실수 x가 존재할 때, 실수 a의 범위는 ?

① $4 \le a \le 12$　② $a \le 4,\ a \ge 12$　③ $6 \le a \le 8$

④ $a \le 6,\ a \ge 8$　⑤ $4 \le a \le 8$

해설

$x^2-(a-6)x+a-3 \le 0$의 실수해가 존재하려면

$D=(a-6)^2-4(a-3) \ge 0$

$a^2-16a+48 \ge 0,\ (a-4)(a-12) \ge 0$

$\therefore\ a \le 4,\ a \ge 12$

18. 정수 n에 대해 $z = i^n + i^{-n}, i = \sqrt{-1}$을 만족하는 z의 개수는?

① 1개　　② 2개　　③ 3개

④ 4개　　⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1,

$i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i$, $i^n = -1$ 이면

$i^{-n} = -1$, $i^n = -i$ 이면

$i^{-n} = i$, $i^n = 1$ 이면

$i^{-n} = 1$

$\therefore\ i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$

$\therefore\ z$는 3개다.

19. 이차식 $x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1$ 이 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 양수 a 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 10 ⑤ 12

해설

$x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1 = 0$ 에서 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(-6y^2 + ay - 1)}}{2}$$

$$= \frac{y \pm \sqrt{25y^2 - 4ay + 4}}{2}$$

일차식의 곱으로 인수분해가 되려면 $\sqrt{}$ 안에 있는

$25y^2 - 4ay + 4$ 가 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, $25y^2 - 4ay + 4 = (5y \pm 2)^2$

$\therefore -4a = \pm 20$,

$a = \pm 5$

$\therefore$ 양수 a 는 5

20. $x+y=3,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

준식 $y=-x+3$ 에서 $x \geq 0,\ y \geq 0$ 이므로
$y=-x+3 \geq 0 \ \rightarrow\ -x \geq -3 \ \rightarrow\ x \leq 3 \therefore\ 0 \leq x \leq 3\ (\because\ x \geq 0)$
또 $2x^2+y^2=2x^2+(-x+3)^2=2x^2+x^2-6x+9=3x^2-6x+9$
완전 제곱식으로 바꾸면 $3(x^2-2x)+9=3(x-1)^2+6$
$\therefore x=1$ 일 때 최솟값 6 , $x=3$ 일 때 최댓값 $18 \therefore M-m=12$

21. 사차방정식 $x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 해는?

① $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$
② $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$
③ $x=\frac{-15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$
④ $x=\frac{15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$
⑤ $x=15\pm\sqrt{221}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

해설

$x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 양변을
x^2으로 나누면
$x^2+8x+17+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=0$
$\therefore x+\frac{1}{x}=A$라 하자.
$A^2+8A+15=(A+3)(A+5)$
$=\left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}+5\right)=0$
$(x^2+3x+1)(x^2+5x+1)=0$
$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

22. 두 부등식 $ax^2+(a^2-1)x+b>0$, $|x|<|a|$의 해가 같을 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a \neq 0$)

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$|x|<|a|$ 에서 양변을 제곱하면
$x^2<a^2$ 이므로
$x^2-a^2<0 \cdots\cdots$ ㉠
㉠의 양변에 $a(a<0)$ 를 곱하면
$ax^2-a^3>0$ 이고
이것이 $ax^2+(a^2-1)x+b>0$ 과
일치해야 하므로
$a^2-1=0, b=-a^3$
$\therefore a=-1,\ b=1$
$\therefore\ a+b=0$

23. x에 대한 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 3$ 의 그래프가 k의 값에 관계없이 항상 직선 $y = ax + b$ 에 접한다. 이 때, 두 상수 $a,\ b$의 합 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x^2 - 2kx + k^2 + 2k - 3 = ax + b$

$x^2 - (2k + a)\,x + k^2 + 2k - 3 - b = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $\mathrm{D} = 0$ 이어야 하므로

$\mathrm{D} = (2\mathrm{k} + \mathrm{a})^2 - 4\left(\mathrm{k}^2 + 2\mathrm{k} - 3 - \mathrm{b}\right) = 0$

$4k\,(a - 2) + a^2 + 4b + 12 = 0$

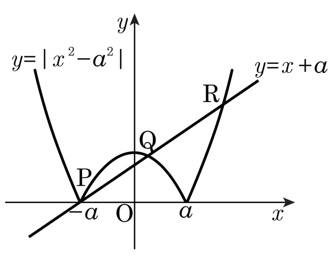
위의 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므 로

$a - 2 = 0,\ a^2 + 4b + 12 = 0$

$\therefore a = 2,\ b = -4$

$\therefore a + b = -2$

24. 다음 그림과 같이 함수 $y=|x^2-a^2|$ 의 그래프와 직선 $y=x+a$가 세 점, P, Q, R에서 만난다. $\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}=12$ 일 때, 양수 a의 값은?



① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

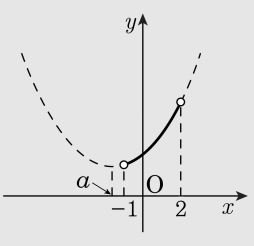
점 Q는 $y=-x^2+a^2$ 의 그래프와
직선 $y=x+a$의 교점이므로
$-x^2+a^2=x+a$에서
$x^2+x-a^2+a=0$
$(x+a)(x-a+1)=0$
$\therefore x=-a$ 또는 $x=a-1$
$\therefore \mathrm{Q}(\mathrm{a}-1,\ 2\mathrm{a}-1)$
점 R는 $y=x^2-a^2$ 의 그래프와
직선 $y=x+a$의 교점이므로
$x^2-a^2=x+a$에서
$x^2-x-a^2-a=0$
$(x+a)(x-a-1)=0$
$\therefore x=-a$ 또는 $x=a+1$
$\therefore \mathrm{R}(a+1,\ 2a+1)$
점 P의 좌표는 $(-a,\ 0)$이므로
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(2a-1)^2+(2a-1)^2}=\sqrt{2}\,|2a-1|$
$\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$
$\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{QR}}=12$이므로
$\sqrt{2}\,|2a-1|\cdot 2\sqrt{2}=12,\quad |2a-1|=3$
$\therefore 2a-1=3$ 또는 $2a-1=-3$
$\therefore a=2$ 또는 $a=-1$
그런데 $a>0$ 이므로 $a=2$

25. $-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - 2ax + 2a + 3 > 0$ 이 항상 성립하도록 하는 정수 a 의 개수는?

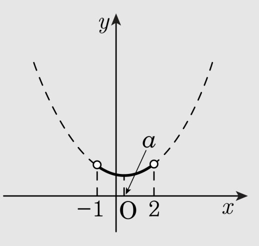
① 2 개　② 3 개　③ 4 개　④ 5 개　⑤ 6 개

해설

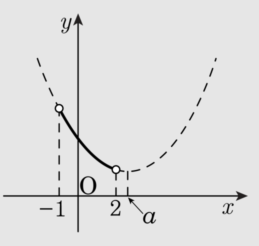
$f(x) = x^2 - 2ax + 2a + 3$ 이라 하면
$f(x) = (x - a)^2 - a^2 + 2a + 3$



$-1 < x < 2$ 에서
부등식 $f(x) > 0$ 이 항상 성립하려면
(i)$a < -1$ 일 때,
다음 그림에서 $f(-1) > 0$
$4a + 4 > 0 \quad \therefore\ a > -1$
그런데 $a < -1$ 이므로 이를 만족시키는 a 의 값은 없다.
(ii) $-1 \le a < 2$ 일 때,



다음 그림에서 $f(a) > 0$
$-a^2 + 2a + 3 > 0$ 에서
$(a + 1)(a - 3) < 0$
$\therefore\ -1 < a < 3$
그런데 $-1 \le a < 2$ 이므로 $-1 < a < 2$
그런데 $a = -1$ 인 경우 $f(a) = 0$ 이어도
$-1 < x < 2$ 에서는 $f(x) > 0$ 이므로 성립한다.
따라서 $-1 \le a < 2$



(iii) $a \ge 2$ 일 때, 다음 그림에서
$f(2) > 0$ $-2a + 7 > 0 \quad \therefore\ a < \frac{7}{2}$
그런데 $a \ge 2$ 이므로 $2 \le a < \frac{7}{2}$
(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는
$-1 \le a < \frac{7}{2}$
따라서, 정수 a 는 $-1, 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 으로 5개다.