

1. 다음 중 $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x + y$

② $-x - y$

③ $x + y - 2$

④ $x - y$

⑤ $2x + 2y$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= (x^2 + 2xy + y^2) - 2(x + y) \\ &= (x + y)^2 - 2(x + y) \\ &= (x + y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned}(x + y)(x + y - 2) &= -(-x - y)(x + y - 2) \\ &= \frac{1}{2}(2x + 2y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

2. $x^6 + 1$ 을 계수가 실수인 범위 내에서 인수분해 할 때, 다음 중 인수인 것은?

① $x^2 + x + 1$

② $x^2 - x + 1$

③ $x^2 + \sqrt{3}x + 1$

④ $x^2 + \sqrt{3}x - 1$

⑤ $x^2 - 1$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2)^3 + 1 \\ &= (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)\{(x^2 + 1)^2 - 3x^2\} \\ &= (x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)\end{aligned}$$

3. $a^2 + ab + a - b - 2$ 의 인수로 적당한 것은?

① $a - b - 2$

② $a + b - 2$

③ $a + b + 2$

④ $a + 1$

⑤ $b + 1$

해설

a 에 관한 내림차순으로 정리 후 인수분해 한다.

$$\text{(준식)} = a^2 + ab + a - b - 2$$

$$= a^2 + (b + 1)a - b - 2$$

$$= (a + b + 2)(a - 1)$$

4. 1999개의 다항식 $x^2 - 2x - 1, x^2 - 2x - 2, \dots, x^2 - 2x - 1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

- ① 43 개 ② 44 개 ③ 45 개 ④ 46 개 ⑤ 47 개

해설

$x^2 - 2x - n = (x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수)라 하면 ($1 \leq n \leq 1999$ 인 자연수)

$$ab = n, a = b - 2$$

$\therefore n = 1 \cdot 3, 2 \cdot 4, 3 \cdot 5, \dots, 43 \cdot 45 (= 1935)$ 의 43개

5. 세 개의 실수 a, b, c 에 대하여 $[a, b, c] = (a - b)(a - c)$ 라 할 때,
 $[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0$ 이면 $[a, b, c]$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$(a - b)(a - c) + (b - c)(b - a) + (c - a)(c - b) = 0$$

전개하여 정리하면 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$$\therefore a = b = c$$

$$\therefore [a, b, c] = (a - b)(a - c) = 0$$

6. $(4 + 3)(4^2 + 3^2)(4^4 + 3^4)(4^8 + 3^8)$ 을 간단히 하면?

① $4^8 + 3^8$

② $4^{15} - 3^{15}$

③ $4^{15} + 3^{15}$

④ $4^{16} - 3^{16}$

⑤ $4^{16} + 3^{16}$

해설

$$\begin{aligned} & (4 + 3)(4^2 + 3^2)(4^4 + 3^4)(4^8 + 3^8) \\ &= (4 - 3)(4 + 3)(4^2 + 3^2)(4^4 + 3^4)(4^8 + 3^8) \\ &= (4^2 - 3^2)(4^2 + 3^2)(4^4 + 3^4)(4^8 + 3^8) \\ &= (4^4 - 3^4)(4^4 + 3^4)(4^8 + 3^8) \\ &= (4^8 - 3^8)(4^8 + 3^8) \\ &= 4^{16} - 3^{16} \end{aligned}$$

7. x 에 대한 항등식 $(x^2 - x - 1)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$ 에서 $a_1 + a_3 + a_5$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면,

$$-1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_6 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면,

$$1 = a_0 - a_1 + \cdots + a_6 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}} - \textcircled{\text{㉡}}: -2 = 2(a_1 + a_3 + a_5)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = -1$$

8. 함수 $f(x) = x^2 + px + q$ 와 $g(x)$ 는 유리수를 계수로 갖는 다항식이고, $f(\sqrt{2}+1) = 0$, $g(\sqrt{2}+1) = 2 + \sqrt{2}$ 이다. 이 때, $g(x)$ 를 $f(x)$ 로 나눈 나머지는?

① $x + 1$

② $x - 1$

③ $-x + 1$

④ $-x - 1$

⑤ $2x + 1$

해설

$g(x)$ 를 $f(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$

나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$g(x) = f(x)Q(x) + ax + b$$

$$\begin{aligned} g(\sqrt{2} + 1) &= f(\sqrt{2} + 1)Q(\sqrt{2} + 1) + a(\sqrt{2} + 1) + b \\ &= a(\sqrt{2} + 1) + b \quad (\because f(\sqrt{2} + 1) = 0) \end{aligned}$$

$$\therefore a + b + a\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\therefore a = 1, b = 1$$

따라서 구하는 나머지는 $x + 1$

9. 이차식 $f(x)$ 를 각각 $x-3, x+1$ 로 나눈 나머지는 같고, $f(1) = 0$ 일 때,
 $\frac{f(4)}{f(-4)} = \frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소)이다. 이 때, $m+n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 34

해설

$f(1) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖는다.

$$\therefore f(x) = (x-1)(ax+b)$$

$$f(3) = f(-1) \text{ 이므로 } 2(3a+b) = -2(-a+b)$$

$$\therefore a = -b$$

$$\frac{f(4)}{f(-4)} = \frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)} = \frac{-9b}{-25b} = \frac{9}{25}$$

$$\therefore m = 25, n = 9$$

10. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - k$ 가 이차식의 완전제곱식으로 인수분해될 때, 상수 k 의 값을 정하면?

① -1

② 1

③ 0

④ 2

⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - k \\ &= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) - k \\ &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - k \\ & x^2 + 5x = X \text{로 치환하면} \\ & (\text{준식}) = (X+4)(X+6) - k \\ & \quad = X^2 + 10X + 24 - k \\ & \text{완전제곱식이 되려면 } 24 - k = 25 \\ & \therefore k = -1 \end{aligned}$$

11. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1 일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z 라 하면 주어진 조건으로부터

$$x + y + z = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2} \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ 이므로

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢} \text{에서 } 0^2 = 1 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\therefore xy + yz + zx = -\frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

$$3xyz = 2(xy + yz + zx)$$

$$\therefore xyz = -\frac{1}{3}$$

$$\text{또, } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } x + y + z = 0 \text{ 이므로}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

12. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$ 의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a = b$ 인 이등변삼각형

② $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형

③ $b = c$ 인 이등변삼각형

④ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

$$a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$$

$$a^2(a + b) + b^2(a + b) - c^2(a + b) = 0$$

$$(a + b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$a = -b \text{ 또는 } c^2 = a^2 + b^2$$

$$a, b, c \text{ 모두 양수이므로, } c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ \text{인 직각삼각형}$$