

1. 48에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

48을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$2 \overline{) 48}$$

$$2 \overline{) 24}$$

$$2 \overline{) 12}$$

$$2 \overline{) 6}$$

$$3$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $2^4 \times 3 \times \square$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 $\square$ 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

2. $90 \times A = B^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 A 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

90을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 90} \\ 3 \overline{) 45} \\ 3 \overline{) 15} \\ 5 \end{array}$$

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$ 이므로 $2 \times 3^2 \times 5 \times A = B^2$ 을 만족하는 A 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 2×5 이다.

3. 540 에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 어떤 수는?

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 15

해설

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

$$540 \times x \text{ 가 제곱수가 되기 위한 가장 작은 } x \text{ 는 } 3 \times 5 = 15$$

4. 28 에 가능한 한 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, a 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$$28 \times a = b^2 \text{ 에서}$$

$$28 = 2^2 \times 7$$

$$a = 7$$

$$2^2 \times 7 \times 7 = b^2$$

$$2^2 \times 7^2 = b^2$$

$$b = 2 \times 7 = 14$$

5. 140 에 어떤 자연수를 곱하였더니 자연수 b 의 제곱이 되었다. 곱할 수 있는 자연수 중 가장 작은 자연수를 a 라 할 때, $140 \times a$ 의 값은?

① 3600

② 4900

③ 6400

④ 8100

⑤ 10000

해설

어떤 자연수를 소인수분해했을 때, 모든 소인수의 지수가 짝수이면 그 수는 다른 자연수의 제곱이 된다.

$$140 = 2^2 \times 5 \times 7$$

5 와 7 의 지수가 홀수이므로 제곱수가 되기 위해 곱해 주어야 하는 수는 $5 \times 7 \times x^2$ (x^2 은 자연수) 꼴이다.

따라서 가장 작은 수 $a = 5 \times 7 = 35$ 이다.

$$140 \times 35 = 2^2 \times 5 \times 7 \times 5 \times 7 = (2 \times 5 \times 7)^2 = (70)^2 = 4900$$

6. 360 을 가장 작은 자연수로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이 때, 나누어야 하는 가장 작은 자연수는?

① 1 ② 5 ③ 10 ④ 15 ⑤ 20

해설

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

따라서 나누어야 하는 가장 작은 자연수는 $2 \times 5 = 10$ 이다.

7. 40 에 적당한 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이 때, 곱해야 할 자연수 중 300 이하의 자연수를 모두 구하여라.
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▷ 정답 : 10
- ▷ 정답 : 40
- ▷ 정답 : 90
- ▷ 정답 : 160
- ▷ 정답 : 250

해설

$40 = 2^3 \times 5$
곱해야 할 자연수를 x 라 할 때,
 $(2^3 \times 5) \times x = y^2$
 $x = 2 \times 5, 2^3 \times 5, 2 \times 3^2 \times 5, 2^5 \times 5, 2 \times 5^3$
 $= 10, 40, 90, 160, 250, \dots$
 x 는 300 이하의 자연수 이므로
10, 40, 90, 160, 250

8. 48 에 자연수 x 를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 다음에서 x 가 될 수 있는 수를 모두 고르면(정답 2개)?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 9 ⑤ 12

해설

$48 = 2^4 \times 3$
곱해야 할 자연수가 x 이고, 어떤 자연수를 y 라 하면 $(2^4 \times 3) \times x = y^2$ 이다.
 $x = 3 \times 1^2, 3 \times 2^2, \dots$
 $= 3, 12, \dots$

9. 40 에 자연수를 곱하여 어떤 수의 제곱이 되도록 하려고 한다. 제곱이 되도록 하기 위해서 곱하는 수를 작은 순으로 4 개를 구하여라.
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▶ 답 :
- ▷ 정답 : 10
- ▷ 정답 : 40
- ▷ 정답 : 90
- ▷ 정답 : 160

해설

$40 = 2^3 \times 5$
 $40 \times n = 2^3 \times 5 \times n = x^2$ 에서
 $n = 2 \times 5 \times k^2$ 꼴이므로
 n 을 작은 순으로 4 개 써 보면
 $n = 2 \times 5 \times 1^2 = 10$
 $n = 2 \times 5 \times 2^2 = 40$
 $n = 2 \times 5 \times 3^2 = 90$
 $n = 2 \times 5 \times 4^2 = 160$
 $\therefore 10, 40, 90, 160$

10. 72 에 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱을 만들려고 한다. 이때, 곱할 수 있는 가장 작은 두 자리의 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$72 \times n = 2^3 \times 3^2 \times n = m^2$ 이라 하면
가장 작은 $n = 2$ 이므로
따라서 n 은
 $n = 2 \times 1^2 = 2$
 $n = 2 \times 2^2 = 8$
 $n = 2 \times 3^2 = 18$
 $n = 2 \times 4^2 = 32$
그러므로 가장 작은 두 자리의 자연수 n 은 18 이다.

11. 24에 가장 작은 자연수 a 를 곱하여 어떤 자연수 b 의 제곱이 되도록 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 2 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 18

해설

$$24 \times a = b^2$$

$$2^3 \times 3 \times a = b^2$$

$$a = 2 \times 3 = 6$$

$$2^3 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = b^2$$

$$b = 2^2 \times 3 = 12$$

$$\therefore a + b = 18$$

12. $48 \times x = y^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

① 3

② 4

③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{1}{3}$

⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$$2^4 \times 3 \times x = y^2$$

가장 작은 $x = 3$,

$$2^4 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = y^2$$

$$y = 2^2 \times 3 = 12$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

13. $63 \times a = b^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 a, b 에 대하여 $\frac{b^2}{a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} 3^2 \times 7 \times a &= b^2 \\ \text{가장 작은 } a &= 7, \\ 3^2 \times 7 \times 7 &= 3^2 \times 7^2 = b^2 \\ b &= 3 \times 7 = 21 \\ \frac{b^2}{a^2} &= \frac{3^2 \times 7^2}{7^2} = 9 \end{aligned}$$

14. 72를 x 로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되면서 3의 배수는 되지 않도록 할 때, 나눌 수 있는 가장 작은 자연수 x 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

$\frac{72}{x} = \frac{2^3 \times 3^2}{x}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 $x = 2, x = 2 \times 3^2, x = 2^3, x = 2^3 \times 3^2$ 이다.

3의 배수가 되지 않아야 하므로 $x = 2 \times 3^2, x = 2^3 \times 3^2$ 중 작은 자연수는 $x = 2 \times 3^2 = 18$ 이다.

15. 24에 가능한 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱해야 하는 자연수는?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

해설

$24 = 2^3 \times 3$ 이므로 제곱수가 되려면
 2×3 , $2^3 \times 3$, $2^3 \times 3^3, \dots$ 을 곱해야 한다.
따라서 가장 작은 자연수는 6이다.

16. $\frac{252}{A} = B^2$ 을 만족하는 자연수 A, B 에 대하여 B 의 최댓값은?
- ① 2 ② 3 ③ 6 ④ 8 ⑤ 14

해설

252 를 소인수분해하면 다음과 같다.

$$2 \overline{)252}$$

$$2 \overline{)126}$$

$$3 \overline{)63}$$

$$3 \overline{)21}$$

$$7$$

$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ 이므로 $\frac{2^2 \times 3^2 \times 7}{A} = B^2$ 을 만족하는 B 의 값
중에서 가장 큰 자연수는 $A = 7$ 일 때 $2 \times 3 = 6$ 이다.

17. $24 \times a$ 가 어떤 자연수 A 의 제곱이 될 때, A 의 최솟값은?

- ① 9 ② 12 ③ 36 ④ 54 ⑤ 100

해설

$$24 \times a = 2^3 \times 3 \times a$$

$$\text{가장 작은 } a = 2 \times 3 = 6$$

$$A^2 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = (12)^2$$

$$\therefore A = 12$$

18. $\frac{n}{2}$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{3}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 432

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $\frac{n}{2}$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2 가 네 번 곱해져 있고, $\frac{n}{3}$ 이 제곱이므로 n 은 3 이 세 번 곱해져 있다.
 $\therefore n = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 432$

19. $2 \times n$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{5}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것은?

① 100 ② 200 ③ 300 ④ 400 ⑤ 500

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $2 \times n$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2 가 두 번 곱해져 있고, $\frac{n}{5}$ 이 제곱이므로 n 은 5 가 세 번 곱해져 있다.

$$\therefore n = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$$

20. 45에 어떤 자연수를 곱하여 어떤 수의 제곱이 되게 하려고 한다. 곱해야 할 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$45 = 3^2 \times 5$
따라서 제곱이 되려면 5를 곱해야 한다.