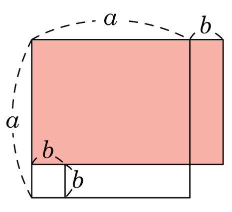
1. 다음 그림에서 색칠한 부분이 나타내고 있는 곱셈공식은 무엇인가?



① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

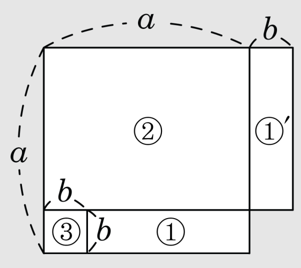
② $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

③ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

④ $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

해설



$(a+b)(a-b) =$ ①′ + ②

①′ = ① 이므로

$(a+b)(a-b) =$ ① + ② $= a^2 - b^2$

$\therefore\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

2. 임의의 x 에 대하여 $x^3-1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 를 만족하는 상수 $a,\ b,\ c,\ d$ 의 합 $a+b+c+d$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

양변에 $x=0$ 을 대입 하면
$-1=a+b+c+d$
$\therefore\ a+b+c+d=-1$

해설

$x^3-1=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$
$=(x+1)\{a(x+1)^2+b(x+1)+c\}+d$
$=(x+1)[(x+1)\{a(x+1)+b\}+c]+d$ 이므로
x^3-1 을 $x+1$ 로 연속으로 나눌 때
차례대로 나오는 나머지가 $d,\ c,\ b$가 되고 마지막 몫이 a 이다.

-1	1	0	0	-1		
		-1	1	-1		
-1	1	-1	1	$\boxed{-2}$	$\leftarrow$	d
		-1	2			
-1	1	-2	$\boxed{3}$	$\leftarrow$	c	
		-1				
	1	$\boxed{-3}$	$\leftarrow$ b			
	$\uparrow$					
	a					

3. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx - 1$이 $x^2 - 3x + 2$로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ 로 놓으면
$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$, $x-2$ 로 나누어 떨어진다.
$f(1) = 1 + a + b - 1 = 0$ 즉, $a + b = 0 \cdots$ ㉠
$f(2) = 8 + 4a + 2b - 1 = 0$ 즉, $4a + 2b = -7 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡으로부터 $a = -\frac{7}{2}$, $b = \frac{7}{2}$
$\therefore a + b = 0$

4. 등식 $\frac{a}{1+i}+\frac{b}{1-i}=-5$를 만족하는 두 실수 $a+b$의 값을 구하시오
(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$를 곱하면
$a(1-i)+b(1+i)=-10,\ (a+b)+(b-a)i=-10$
$\therefore a+b=-10,\ b-a=0$

5. $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{50}}$ 의 값은?

① $-1+i$　② $-1-i$　③ 0

④ $1+i$　⑤ $1-i$

해설

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{50}}$

$\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\left(\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}\right)+\cdots$

$+\left(\frac{1}{i^{45}}+\frac{1}{i^{46}}+\frac{1}{i^{47}}+\frac{1}{i^{48}}\right)+\frac{1}{i^{49}}+\frac{1}{i^{50}}$

$=\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\cdots$

$+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\frac{1}{i}-1$

$=\frac{1}{i}-1=-i-1$

6. $z = \dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^2 - 2z + 3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ -1

해설

$z = \dfrac{2}{1+i} = 1 - i$

$z^2 - 2z + 3 = (1-i)^2 - 2(1-i) + 3 = 1$

7. 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x+a)^2=b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$x^2+2x+3=0$ 를 완전제곱식으로 고치면
$(x^2+2x+1)+2=0,\quad (x+1)^2=-2$
$\therefore a=1,\ b=-2$
$\therefore a-b=3$

8. 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$x^2-3x+2=0$

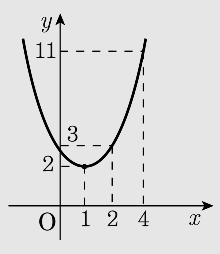
$(x-2)(x-1)=0$

$x=1$ 또는 $x=2$이므로 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

9. $2 \le x \le 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

해설



$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$
따라서 함수의 그래프는 점$(1, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로
(ⅰ) $x = 2$ 일 때 최소이며, 최솟값은 $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$
$\therefore\ m = 3$
(ⅱ) $x = 4$ 일 때 최대이며, 최댓값은 $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$
$\therefore\ M = 11$
$\therefore\ M + m = 14$

10. 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+3z=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

의 해를 $x=a, y=b, z=c$라 할 때, $a(b+c)$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

㉡ − ㉢에서 $2y-x=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ㉣

㉠ + ㉣에서 $4y=2 \quad \therefore\ y=\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots$ ㉤

㉠, ㉡, ㉤ 에서 $x=1,\ z=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ a(b+c)=1\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$

11. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$ 또는 $x=r,\ y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

12. 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $a > b,\ c > d$ 이면 $a + c > b + d$ 이다.

㉡ $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다.

㉢ $a > b > 0$ 이면 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ 이다.

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $a - b > 0,\ c - d > 0$ 에서 양변을 더해 정리하면 주어진 식이 나온다.

㉡ $a > 0 > b$ 인 경우 b의 절댓값이 a 보다 크면 주어진 식은 성립하지 않는다.

㉢ 주어진 식에서 a, b의 부호가 모두 양수이므로 그 역수는 반대가 된다.

13. 부등식 $x^2+x+m\geq 0$의 x의 값에 관계없이 성립할 때, 실수 m의 최솟값은?

① -4　② 0　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

해설

$x^2+x+m\geq 0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x^2+x+m=0$의 판별식을 D라 할 때
$D=1^2-4m\leq 0$　$\therefore m\geq \frac{1}{4}$
따라서 실수 m의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

14. $\begin{cases} x^2 - 3x \le 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 범위의 해가 $\alpha < x \le \beta$ 일 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$x^2 - 3x \le 0$ 에서
$x(x-3) \le 0$ 이므로
$0 \le x \le 3 \cdots$ ㈎
$x^2 - 5x + 4 < 0$ 에서
$(x-1)(x-4) < 0$ 이므로
$1 < x < 4 \cdots$ ㈏
㈎, ㈏에 의해
$1 < x \le 3$ 이므로
$\alpha = 1, \beta = 3$
$\therefore \alpha + \beta = 4$

15. 두 부등식 $2x-1>0$, $(x+1)(x-a)<0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}<x<3$이 되도록 하는 정수 a의 값은? (단, $a>1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}$ …… ①

$(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a$ …… ②

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2}<x<3$이므로

$\therefore a=3$

16. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

준 식은 $(a-b)^3$ 이다.
$a - b = 2004 - 2001 = 3$
$\therefore\ (a-b)^3 = 3^3 = 27$

17. $(x^2-8x+12)(x^2-7x+12)-6x^2$ 을 인수분해하면?

① $(x^2-x+2)(x^2-5x+2)$

② $(x^2-5x+12)(x^2-10x+12)$

③ $(x^2-3x+4)(x^2-x+2)$

④ $(x^2+3x+12)(x^2-5x+12)$

⑤ $(x^2+x+12)(x^2-2x+12)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \{(x^2+12)-8x\}\{(x^2+12)-7x\}-6x^2\\ &= (x^2+12)^2-15x(x^2+12)+50x^2\\ &= (x^2+12-5x)(x^2+12-10x)\\ &= (x^2-5x+12)(x^2-10x+12)\end{aligned}$$

18. 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라.(인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 49 개

해설

$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$

$\therefore\ N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$

$= (35+1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6$

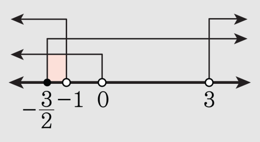
$\therefore$ 약수의 개수 $= (6+1) \times (6+1) = 49$

19. 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-2k-3=0$의 두 근이 모두 음수 일 때, k의 범위를 구하면?

① $-\frac{3}{2} \le k < -1$　　② $-\frac{3}{2} < k < 0$
③ $-1 < k < 0$　　④ $-1 < k < 3$
⑤ $k < 0$ 또는 $k > 3$

해설

(i) 판별식이 0보다 크거나 같다.
$D' = k^2 - (k^2 - 2k - 3) \ge 0$에서
$k \ge -\frac{3}{2}$
(ii) 두 근의 곱은 0보다 크다.
$k^2 - 2k - 3 > 0$에서 $(k+1)(k-3) > 0$
$\therefore k < -1$ 또는 $k > 3$
(iii) 두 근의 합이 0보다 작다.
$2k < 0 \therefore k < 0$



공통범위를 구하면, $-\frac{3}{2} \le k < -1$

20. 다음 식은 평면 위에 있는 어떤 그래프의 방정식이다. 이 그래프가 x 축에 접하도록 실수 a, b 의 값에 대해 $a+b$ 의 값을 구하면?

$$y+(x+y)x+(a-1)x-b^2=0$$

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

접점의 x 좌표는 $y=0$ 일 때, 얻어지는 방정식
$x^2+(a-1)x-b^2=0$ 의 중근이다.
$\therefore\ D=(a-1)^2+4b^2=0$
a, b 는 실수이므로 $a=1$, $b=0$
$\therefore\ a+b=1$

21. x에 관한 삼차방정식 $2x^3 + ax^2 - bx + 3 = 0$ 의 한 근이 1이고, $a + b + 1 = 0$일 때, 나머지 근을 모두 구하면?

① -3　　② $-1,\ 2$　　③ $-1,\ 3$

④ $-1,\ \frac{3}{2}$　　⑤ $-\frac{1}{2},\ 3$

해설

한 근이 1이므로 주어진 식에 $x = 1$을 대입하면

$2 + a - b + 3 = 0,\ a - b = -5$

주어진 조건인 $a + b + 1 = 0$과 연립하여 풀면

$a = -3,\ b = 2$

$\therefore 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$

$(x - 1)(2x^2 - x - 3) = 0$

$(x - 1)(2x - 3)(x + 1) = 0$

$\therefore x = 1,\ \frac{3}{2},\ -1$

22. 삼차방정식 $x^3+ax^2-b=0$ 의 한 근이 $1+i$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^3+ax^2-b=0$ 의 세 근이 $1+i, 1-i, \alpha$ 라고 하면
세 근의 합 : $1+i+1-i+\alpha=-a \quad \cdots$ ㉠
$0=(1+i)(1-i)+\alpha(1-i)+\alpha(1+i) \quad \cdots$ ㉡
세 근의 곱 : $(1+i)(1-i)\alpha=b \quad \cdots$ ㉢
㉡식에서 $1+1+2\alpha=0$, $\alpha=-1$
㉠식에서 $2+\alpha=-a$, $a=-1$
㉢식에서 $-1(1+i)(1-i)=b$, $b=-2$
$\therefore\ a+b=-3$

23. $x^3 = 1$ 의 한 허근이 ω 일 때, $\omega^{10} + \omega^5 + 1$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$w^3 = 1$,
$x^3 - 1 = 0$
$\Rightarrow$ $(x-1)(x^2+x+1) = 0$ 의 한 허근이 ω
$\Rightarrow w^2 + w + 1 = 0$
$\omega^{10} + \omega^5 + 1 = (w^3)^3 w + w^2 \cdot w^3 + 1$
$= w^2 + w + 1$
$= 0$

24. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 25 \\ v = 12 \end{cases}$$

$\therefore\ u = \pm 7,\ v = 12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x + y = 7 & \cdots ㉢ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x + y = -7 & \cdots ㉣ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$

(i) ㉢, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 - 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = 3,\ y = 4$ 또는 $x = 4,\ y = 3$

(ii) ㉣, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 + 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = -3,\ y = -4$ 또는 $x = -4,\ y = -3$

(i), (ii)로부터 구하는 모든 해의 합은 0

25. x에 관한 이차부등식 $x^2-(a-6)x+a-3\le 0$을 만족하는 실수 x가 존재할 때, 실수 a의 범위는 ?

① $4\le a\le 12$　② $a\le 4,\ a\ge 12$　③ $6\le a\le 8$
④ $a\le 6,\ a\ge 8$　⑤ $4\le a\le 8$

해설

$x^2-(a-6)x+a-3\le 0$의 실수해가 존재하려면
$D=(a-6)^2-4(a-3)\ge 0$
$a^2-16a+48\ge 0,\ (a-4)(a-12)\ge 0$
$\therefore\ a\le 4,\ a\ge 12$