

1. 자연수  $A = 2^2 \times 3^n$  의 약수의 개수가 24 일 때,  $n$  의 값을 구하면?

- ① 2      ② 5      ③ 7      ④ 8      ⑤ 12

해설

$$(2+1)(n+1) = 24$$

$$n+1 = 8$$

$$\therefore n = 7$$

2. 자연수  $2^3 \times 3^a$  의 약수의 개수가 12 일 때,  $a$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$(3+1)(a+1) = 12$$

$$a+1 = 3$$

$$\therefore a = 2$$

3. 자연수  $3^a \times 5^4 \times 7^5$  의 약수의 개수가 120 이다. 이때,  $a$  의 값은?

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

해설

$$(a+1)(4+1)(5+1) = 120$$

$$a+1 = 4$$

$$\therefore a = 3$$

4.  $2^4 \times \square$  의 약수의 개수가 15 개일 때,  $\square$  안에 들어갈 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$15 = 5 \times 3 = (4 + 1) \times (2 + 1)$$

$\square$ 에 알맞은 가장 작은 자연수는  $3^2 = 9$

$\therefore 9$

5.  $5^6 \times \square$  의 약수의 개수가 21 개일 때,  $\square$  안에 들어갈 수 있는 자연수 중 가장 작은 것은?

- ① 1      ② 4      ③ 9      ④ 16      ⑤ 25

해설

$$21 = 7 \times 3 = (6 + 1) \times (2 + 1)$$

$\square$  에 알맞은 가장 작은 자연수는  $2^2 = 4$

$\therefore 4$

6.  $2^2 \times \square \times 7$  은 어떤 수를 소인수분해한 식이고 이 수는 약수의 개수가 12 개인 가장 작은 수이다.  $\square$  안에 알맞은 수는?

- ① 2      ② 3      ③ 5      ④ 7      ⑤ 11

해설

$$2^2 \times a^n \times 7$$

$$(2+1) \times (n+1) \times (1+1) = 12 \therefore n = 1$$

2를 제외한 가장 작은 소수는 3이므로

$$3^1 = 3$$

7. 자연수  $3^4 \times A$  의 약수의 개수가 10 개일 때, 가장 작은 두 자리 자연수  $A$  를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 11

해설

$$10 = 10 \times 1 = 5 \times 2$$

(1)  $10 = 10 \times 1 = (9 + 1)$  일 때,

$$3^4 \times A = 3^9 \quad \therefore A = 3^5$$

그러나  $3^5 = 243$  은 두 자리 수가 아니다.

(2)  $10 = 5 \times 2 = (4 + 1) \times (1 + 1)$  일 때,

$$3^4 \times A = 3^4 \times (3 \text{이 아닌 소수})$$

$$\therefore A = 2, 5, 7, 11, 13, \dots$$

따라서 가장 작은 두 자리 자연수  $A$  는 11이다.

8.  $3^4 \times x$  는 약수의 개수가 10개인 자연수이다. 다음 중  $x$  의 값으로 알맞지 않은 것은?

① 2      ② 3      ③ 5      ④ 7      ⑤  $3^5$

**해설**

약수의 개수는  $3^4 \times x$  에서

$(4+1) \times (\square+1) = 5 \times 2 = 10$  또는  $(9+1) = 10$  이 될 수 있다.  
즉  $x$  가 될 수 있는 수는 3과 서로소이고 지수가 1인 수 또는  $3^5$  이다.

그러므로 알맞지 않은 것은 3 이다.

9. 72의 약수의 개수와  $5^x \times 11^2$ 의 약수의 개수가 같을 때, 자연수  $x$ 의 값은?

- ① 2      ② 3      ③ 4      ④ 5      ⑤ 6

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$ 의 약수의 개수는  
 $(3+1) \times (2+1) = 12$  (개)이다.  
 $5^x \times 11^2$ 의 약수의 개수는  
 $(x+1) \times (2+1) = 12$  (개)가 되어야 한다.  
 $\therefore x = 3$

10. 810의 약수의 개수와  $3 \times 5^x \times 7$ 의 약수의 개수가 같을 때, 자연수  $x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$810 = 2 \times 3^4 \times 5$ 의 약수의 개수가  $3 \times 5^x \times 7$ 의 약수의 개수와 같으므로

$$(1+1)(4+1)(1+1) = (1+1)(x+1)(1+1) = 20$$

$$\therefore x = 4$$

11. 882의 약수의 개수와  $2 \times 5^x \times 7^2$ 의 약수의 개수가 같을 때, 자연수  $x$ 의 값은?

- ① 5      ② 4      ③ 3      ④ 2      ⑤ 1

해설

$882 = 2 \times 3^2 \times 7^2$ 의 약수의 개수가  $2 \times 5^x \times 7^2$ 의 약수의 개수와 같으므로

$$(1+1)(2+1)(2+1) = (1+1)(x+1)(2+1) = 18$$

$$\therefore x = 2$$

12. 자연수 288의 약수의 개수와 자연수  $4 \times 3 \times 7^a$ 의 약수의 개수가 같을 때,  $a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$288 = 2^5 \times 3^2$  이므로

약수의 개수는  $(5+1) \times (2+1) = 18$  (개)

$4 \times 3 \times 7^a = 2^2 \times 3 \times 7^a$  이므로

약수의 개수는

$(2+1) \times (1+1) \times (a+1) = 6 \times (a+1)$  (개)

$6 \times (a+1) = 18$  이므로

$a+1 = 3$

$\therefore a = 2$

13.  $27 \times \square$ 는 약수의 개수가 12개인 가장 작은 자연수이다.  $\square$  안에 들어갈 가장 작은 자연수는?

- ① 2      ②  $2^2$       ③  $2^3$       ④ 3      ⑤  $3^2$

해설

$3^3 \times \square$ 에서  $\square = a^x$  이라 하면 약수의 개수는  $(3+1) \times (x+1) = 12$  (개) 이므로

$$(3+1) \times (x+1) = 4 \times (x+1) = 12$$

$$x+1 = 3 \quad \therefore x = 2$$

$a$ 가 될 수 있는 가장 작은 소인수는 2 이므로

$$\square = 2^2$$

14.  $20 \times \square$ 의 약수의 개수가 18개일 때,  $\square$ 안에 들어갈 가장 작은 자연수는?

- ① 4      ② 8      ③ 9      ④ 25      ⑤ 49

해설

(i)  $\square = 2^a$  일 때  $18 = (8+1) \times (1+1)$  이므로  
 $\square = 2^6 = 64$

(ii)  $\square \neq 2^a$  일 때  $18 = (2+1) \times (a+1) \times (1+1)$   
 $a = 2$ , 가장 작은 자연수는  $3^2 = 9$

$\therefore$  (i), (ii)에서 가장 작은 자연수는 9

15.  $2^a \times 3^b$  의 약수의 개수가 6 개 일 때,  $2^a \times 3^b$  이 가장 작은 자연수가 되도록 하는  $a, b$  를 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답:  $a = 2$

▷ 정답:  $b = 1$

해설

자연수  $A$  가  $A = a^m \times b^n$  으로 소인수분해될 때 ( $A$  의 약수의 개수)는  $(m+1) \times (n+1)$  개 이다.

$$\begin{aligned} 6 &= 1 \times 6 = (0+1) \times (5+1) \\ &= 6 \times 1 = (5+1) \times (0+1) \\ &= 2 \times 3 = (1+1) \times (2+1) \\ &= 3 \times 2 = (2+1) \times (1+1) \end{aligned}$$

이므로,  $(a, b)$  의 순서쌍으로 가능한 순서쌍은 모두  $(0, 5), (5, 0), (1, 2), (2, 1)$  이다.

i)  $(a, b) = (0, 5)$  일 때,  
구하고자 하는 수는  $2^0 \times 3^5 = 1 \times 3^5 = 243$  이다.

ii)  $(a, b) = (5, 0)$  일 때,  
구하고자 하는 수는  $2^5 \times 3^0 = 2^5 \times 1 = 32$  이다.

iii)  $(a, b) = (1, 2)$  일 때,  
구하고자 하는 수는  $2^1 \times 3^2 = 18$  이다.

iv)  $(a, b) = (2, 1)$  일 때,  
구하고자 하는 수는  $2^2 \times 3^1 = 12$  이다.

따라서 i), ii) iii), iv) 에서 가장 작은 수는 12 이다.

16.  $a \times 3^2 \times 5^3$  과 360 의 약수의 개수가 같을 때,  $a$  의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \rightarrow 360$  의 약수의 개수 =  $4 \times 3 \times 2 = 24$

$a = x^n$  이라 두면,

$a \times 3^2 \times 5^3$  의 약수의 개수 =  $(n+1) \times 3 \times 4 \rightarrow n = 1$

$\therefore a$  의 최솟값 = 2