1. 자연수 $A = 2^2 \times 3^n$ 의 약수의 개수가 24 일 때, n 의 값을 구하면?

① 2 ② 5 ③ 7 ④ 8 ⑤ 12

해설

$(2+1)(n+1) = 24$

$n+1 = 8$

$\therefore\ n = 7$

2. 자연수 $2^3 \times 3^a$ 의 약수의 개수가 12 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(3+1)(a+1) = 12$

$a+1 = 3$

$\therefore\ a = 2$

3. 자연수 $3^a \times 5^4 \times 7^5$ 의 약수의 개수가 120 이다. 이때, a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(a+1)(4+1)(5+1) = 120$

$a+1 = 4$

$\therefore\ a = 3$

4. $2^4 \times \square$ 의 약수의 개수가 15 개일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$15 = 5 \times 3 = (4+1) \times (2+1)$

$\square$에 알맞은 가장 작은 자연수는 $3^2 = 9$

$\therefore$ 9

5. $5^6 \times \square$ 의 약수의 개수가 21 개일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 자연수 중 가장 작은 것은?

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

해설

$21 = 7 \times 3 = (6+1) \times (2+1)$

$\square$ 에 알맞은 가장 작은 자연수는 $2^2 = 4$

$\therefore$ 4

6. $2^2 \times \square \times 7$ 은 어떤 수를 소인수분해한 식이고 이 수는 약수의 개수가 12 개인 가장 작은 수이다. $\square$ 안에 알맞은 수는?

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 11

해설

$2^2 \times a^n \times 7$

$(2+1) \times (n+1) \times (1+1) = 12 \ \therefore \ n = 1$

2를 제외한 가장 작은 소수는 3이므로

$3^1 = 3$

7. 자연수 $3^4 \times A$ 의 약수의 개수가 10 개일 때, 가장 작은 두 자리 자연수 A 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$10 = 10 \times 1 = 5 \times 2$

(1)$10 = 10 \times 1 = (9 + 1)$ 일 때,

$3^4 \times A = 3^9 \quad \therefore A = 3^5$

그러나 $3^5 = 243$ 은 두 자리 수가 아니다.

(2)$10 = 5 \times 2 = (4 + 1) \times (1 + 1)$ 일 때,

$3^4 \times A = 3^4 \times$ (3이 아닌 소수)

$\therefore A = 2,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ \cdots$

따라서 가장 작은 두 자리 자연수 A 는 11이다.

8. $3^4 \times x$ 는 약수의 개수가 10 개인 자연수이다. 다음 중 x 의 값으로 알맞지 <u>않은</u> 것은?

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 3^5

해설

약수의 개수는 $3^4 \times x$ 에서

$(4+1)\times(\square+1) = 5\times 2 = 10$ 또는 $(9+1) = 10$ 이 될 수 있다.

즉 x가 될 수 있는 수는 3과 서로소이고 지수가 1인 수 또는 3^5 이다.

그러므로 알맞지 않은 것은 3 이다.

9. 72 의 약수의 개수와 $5^x \times 11^2$ 의 약수의 개수가 같을 때, 자연수 x 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$ 의 약수의 개수는
$(3+1) \times (2+1) = 12$ (개) 이다.
$5^x \times 11^2$ 의 약수의 개수는
$(x+1) \times (2+1) = 12$ (개) 가 되어야 한다.
$\therefore\ x = 3$

10. 810 의 약수의 개수와 $3 \times 5^x \times 7$ 의 약수의 개수가 같을 때, 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$810 = 2 \times 3^4 \times 5$ 의 약수의 개수가 $3 \times 5^x \times 7$ 의 약수의 개수와 같으므로

$(1+1)(4+1)(1+1) = (1+1)(x+1)(1+1) = 20$

$\therefore \ x = 4$

11. 882 의 약수의 개수와 $2\times5^x\times7^2$ 의 약수의 개수가 같을 때, 자연수 x 의 값은 ?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$882=2\times3^2\times7^2$ 의 약수의 개수가 $2\times5^x\times7^2$ 의 약수의 개수와 같으므로

$(1+1)(2+1)(2+1)=(1+1)(x+1)(2+1)=18$

$\therefore\ x=2$

12. 자연수 288 의 약수의 개수와 자연수 $4\times3\times7^a$ 의 약수의 개수가 같을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$288 = 2^5 \times 3^2$ 이므로
약수의 개수는 $(5+1)\times(2+1) = 18$ (개)
$4\times3\times7^a = 2^2\times3\times7^a$ 이므로
약수의 개수는
$(2+1)\times(1+1)\times(a+1) = 6\times(a+1)$ (개)
$6\times(a+1) = 18$ 이므로
$a+1 = 3$
$\therefore\ a = 2$

13. $27\times\square$ 는 약수의 개수가 12 개인 가장 작은 자연수이다. $\square$ 안에 들어갈 가장 작은 자연수는?

① 2 ② 2^2 ③ 2^3 ④ 3 ⑤ 3^2

해설

$3^3\times\square$ 에서 $\square=a^x$ 이라 하면 약수의 개수는 $(3+1)\times(x+1)=12$ (개) 이므로

$(3+1)\times(x+1)=4\times(x+1)=12$

$x+1=3 \quad \therefore\ x=2$

a 가 될 수 있는 가장 작은 소인수는 2 이므로

$\square=2^2$

14. $20 \times \square$의 약수의 개수가 18개일 때, $\square$안에 들어갈 가장 작은 자연수는?

① 4 ② 8 ③ 9 ④ 25 ⑤ 49

해설

(i) $\square = 2^a$ 일 때 $18 = (8+1) \times (1+1)$ 이므로

$\square = 2^6 = 64$

(ii) $\square \neq 2^a$ 일 때 $18 = (2+1) \times (a+1) \times (1+1)$

$a = 2$, 가장 작은 자연수는 $3^2 = 9$

$\therefore$ (i), (ii)에서 가장 작은 자연수는 9

15. $2^a \times 3^b$ 의 약수의 개수가 6 개 일 때, $2^a \times 3^b$ 이 가장 작은 자연수가 되도록 하는 a, b 를 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

▷ 정답: $b = 1$

해설

자연수 A 가 $A = a^m \times b^n$ 으로 소인수분해될 때 (A 의 약수의 개수)는 $(m+1) \times (n+1)$ 개 이다.

$$\begin{aligned} 6 &= 1 \times 6 = (0+1) \times (5+1) \\ &= 6 \times 1 = (5+1) \times (0+1) \\ &= 2 \times 3 = (1+1) \times (2+1) \\ &= 3 \times 2 = (2+1) \times (1+1) \end{aligned}$$

이므로, (a,b) 의 순서쌍으로 가능한 순서쌍은 모두 $(0,\ 5)$, $(5,\ 0)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$ 이다.

i) $(a,b) = (0,5)$ 일 때,
구하고자 하는 수는 $2^0 \times 3^5 = 1 \times 3^5 = 243$ 이다.

ii) $(a,b) = (5,0)$ 일 때,
구하고자 하는 수는 $2^5 \times 3^0 = 2^5 \times 1 = 32$ 이다.

iii) $(a,b) = (1,2)$ 일 때,
구하고자 하는 수는 $2^1 \times 3^2 = 18$ 이다.

iv) $(a,b) = (2,1)$ 일 때,
구하고자 하는 수는 $2^2 \times 3^1 = 12$ 이다.

따라서 i), ii) iii), iv) 에서 가장 작은 수는 12 이다.

16. $a \times 3^2 \times 5^3$ 과 360 의 약수의 개수가 같을 때, a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \rightarrow 360$ 의 약수의 개수$= 4 \times 3 \times 2 = 24$

$a = x^n$ 이라 두면,

$a \times 3^2 \times 5^3$ 의 약수의 개수$= (n+1) \times 3 \times 4 \rightarrow n = 1$

$\therefore a$ 의 최솟값$= 2$