**1.** 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$의 네 근 중 가장 작은 근을 $a$, 가장 큰 근을 $b$라 할 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

**2.** 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① $-2$　　② $-1$　　③ $0$　　④ $1$　　⑤ $2$

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서

$x^2 = t$로 치환하면

$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$

$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$

따라서 모든 실근의 곱은

$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

**3.** $x$에 대한 삼차방정식 $x^3+2x^2+(k+1)x+k=0$의 근이 모두 실근이 되도록 하는 실수 $k$의 값의 범위는?

① $-1 \le k$　　② $1 \le k < 2$　　③ $k > 0$

④ $-1 < k \le \frac{1}{4}$　　⑤ $k \le \frac{1}{4}$

해설

방정식 $x^3+2x^2+(k+1)+k=0$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$(x+1)(x^2+x+k)=0$

이 때, 주어진 방정식의 모든 근이 실근이 되려면

방정식 $x^2+x+k=0$이 실근을 가져야 하므로

$D=1^2-4k \ge 0$

$\therefore\ k \le \frac{1}{4}$

**4.** 사차방정식 $x^4 + 3x^2 + a = 0$의 한 근이 1일 때, 허근은?

① $\pm i$ ② $\pm 2i$ ③ $\pm 3i$ ④ $\pm 4i$ ⑤ $\pm 5i$

**해설**

한 근이 1이므로 사차방정식 $x^4 + 3x^2 + a = 0$에 대입하면

$1 + 3 + a = 0, \qquad \therefore a = -4$

방정식 $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$에서 $x^2 = t$로 치환하면

$t^2 + 3t - 4 = 0$ , $(t + 4)(t - 1) = 0$, $(x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$

$\therefore x = \pm 2i$ 또는 $x = \pm 1$

따라서, 주어진 방정식의 허근은 $\pm 2i$이다.

**5.** 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{2}i$ 일 때, 두 실수 $a, b$ 의 곱 $ab$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$ )

① $-15$ ② $-10$ ③ $0$ ④ $5$ ⑤ $10$

**해설**

한 근이 $1+\sqrt{2}i$이므로 켤레근은 $1-\sqrt{2}i$

세 근이 $\alpha, \beta, \gamma$ 일때 $\alpha\beta\gamma=3$이므로, $\alpha=1+\sqrt{2}i$ , $\beta=1-\sqrt{2}i$

라 하면, $(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)\cdot\gamma=3$

$3\cdot\gamma=3$

$\gamma=1$

$\alpha+\beta+\gamma=-a=(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)+1=3$

$a=-3$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\beta=b=3+(1-\sqrt{2}i)\cdot 1+1\cdot(1+\sqrt{2}i)=5$

$b=5$

$\therefore\ ab=(-3)\cdot 5=-15$

**6.** 계수가 유리수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한근이 $2-\sqrt{3}$일 때, $\dfrac{c-b}{a}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

계수가 유리수인 이차방정식에서 $2-\sqrt{3}$이 근이면 $2+\sqrt{3}$도 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $-\dfrac{b}{a}=\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=4$

$\dfrac{c}{a}=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$

$\therefore\ \dfrac{c-b}{a}=\dfrac{c}{a}+\left(-\dfrac{b}{a}\right)=1+4=5$

**7.** 연립방정식 $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ 의 근 $x, y$가 $xy=a$ , $x+y=b$를 만족할 때, $a-b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\begin{cases} 2x-y-5=0 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=25 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠식을 정리해서

$y=2x-5$ 를 ㉡식에 대입한다.

$x^2+(2x-5)^2=25$,

$5x^2-20x=0$ , $x(x-4)=0$

$\therefore\ x=0,\ 4$

i ) $x=0$일 때, $y=-5$

$\therefore a=0,\ b=-5$

$\therefore a-b=5$

ii ) $x=4$일 때, $y=3$

$\therefore a=12,\ b=7$

$\therefore a-b=5$

**8.** $x, y$가 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 를 만족시킬 때, $(x+y)^2$의 값을 구하면?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 10

해설

$(x-y)^2 = 4$에서

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4 & \cdots ㉠ \\ x^2 + 4xy + y^2 = 10 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡ − ㉠ : $6xy = 6$,

$\therefore\ xy = 1$

$$\therefore\ (x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy = 4 + 4 \cdot 1 = 8$$

해설

실제로 연립방정식을 풀면,

$x = y + 2$를 ㉡에 대입하면

$(y+2)^2 + 4y(y+2) + y^2 = 10$

$6y^2 + 12y - 6 = 0,\ y^2 + 2y - 1 = 0$

근의 공식을 이용하면,

$\therefore\ y = -1 \pm \sqrt{2},\ x = 1 \pm \sqrt{2}$(복호동순)

$$\therefore\ (x+y)^2 = ((1 \pm \sqrt{2}) + (-1 \pm \sqrt{2}))^2 = (\pm 2\sqrt{2})^2 = 8$$

**9.** 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 \\ 5x^2-y^2=4 \end{cases}$ 의 근을 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 & \cdots ① \\ 5x^2-y^2=4 & \cdots ② \end{cases}$$

①식을 인수분해하면

$(2x-y)(x-y)=0 \quad \therefore \; y=2x, \; y=x$

②식에 대입하면

$y=2x$일 때 $5x^2-(2x)^2=4$, $x^2=4$, $x=\pm2$, $y=\pm4$

$y=x$일 때 $5x^2-x^2=4$, $4x^2=4$ $x^2=1$, $x=\pm1$, $y=\pm1$

$\therefore \alpha+\beta=6, \; -6, \; 2, \; -2$

$\therefore \alpha+\beta$ 의 최댓값은 6

**10.** 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

① $x = \sqrt{3},\ y = -\sqrt{3}$ ② $x = 2,\ y = 1$

③ $x = -\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}$ ④ $x = -2,\ y = -1$

⑤ $x = 2,\ y = -1$

**해설**

$x^2 - xy - 2y^2 = 0$

$\Rightarrow (x+y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = -y$ $2x^2 + y^2 = 2y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm\sqrt{3}, \quad x = \mp\sqrt{3}$

ii) $x = 2y$ $2x^2 + y^2 = 8y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm 1, \quad x = \pm 2$

$\therefore$ 해는 $\begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \end{cases}$ , $\begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$ (복호동순)

**11.** 연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=-5 & \cdots\cdots ① \\ x^2+xy+y^2=7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 을 만족하는 $x, y$에 대해 $x+y$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$ 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ $-1$　　④ 2　　⑤ $-2$

해설

$x+y=u,\ \ xy=v$ 로 놓으면
①은 $u+v=-5 \ \cdots\cdots$ ③
②는 $u^2-v=7 \ \cdots\cdots$ ④
③, ④에서 $v$ 를 소거하면
$u^2+u-2=0$
$\therefore\ (u-1)(u+2)=0$
$u=1$ 일 때, $v=-6$ 이므로
$t^2-t-6=0$ 에서 $t=-2,\ 3$
$u=-2$ 일 때, $v=-3$ 이므로
$t^2+2t-3=0$ 에서 $t=1,\ -3$
따라서, 구하는 근은

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$$

$\therefore\ \ M=1,\ \ m=-2\ \ \therefore\ \ M+m=-1$

**12.** 연립방정식 $x^2+y^2=5(xy-1)=10xy-5(x+y)$ 의 해를 꼭지점으로 하는 도형의 넓이를 구하면?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$(x+y)^2-2xy=5(xy-1)=10xy-5(x+y)$ 에서

$x+y=u,\ xy=v$ 라 놓으면

$\begin{cases} u^2-2v=5(v-1) \\ 5(v-1)=10v-5u \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} u^2=7v-5 \\ v=u-1 \end{cases}$ 을 풀면

$\therefore \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} u=4 \\ v=3 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ $\cdots\cdots$ ㉠

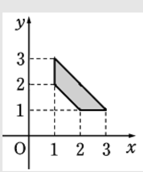
$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 $x,\ y$ 는 $t^2-3t+2=0$ 의 근이므로

$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

㉡의 $x,\ y$ 는 $t^2-4t+3=0$ 의 근이므로

$(x,\ y)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$




구하는 도형은 그림의 사각형이다.

$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

**13.** 방정식 $xy+4x-2y-11=0$을 만족하는 정수 $x, y$에 대하여 $xy$의 값이 아닌 것은?

① $-15$　② $-7$　③ $-3$　④ $5$　⑤ $15$

해설

$xy+4x-2y-11=0$에서 $(x-2)(y+4)=3$

$x, y$가 정수이므로

$(x-2,\ y+4)=(1,3),(-1,-3),(3,1),(-3,-1)$

$\therefore\ (x,\ y)=(3,-1),(1,-7),(5,-3),(-1,-5)$

$\therefore\ xy=-3,-7,-15,5$

**14.** 다음 방정식을 만족하는 양의 정수의 값이 <u>아닌</u> 것은?

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + 6 = 0$$

① 5 ② 7 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2-3xy+2y^2=-6$의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x-2y)=-6$
이 때, $x$, $y$는 양의 정수이므로 $x-y$, $x-2y$도 정수이고 $x-y>x-2y$이다.
따라서, $x-y$, $x-2y$의 값은 다음 표와 같다.

| $x-y$ | 1 | 2 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $x-2y$ | $-6$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ |

그러므로 각각을 연립하여 풀면 구하는 $x$, $y$의 값은

$\begin{cases} x=8 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases}$ 또는

$\begin{cases} x=8 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=13 \\ y=7 \end{cases}$