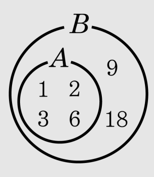
1. 두 집합 $A = \{x|x$는 6의 약수$\}$, $B = \{x|x$는 18의 약수$\}$ 에 대하여 다음 빈 칸에 알맞은 기호는?

$$A \boxed{} B$$

① $\subset$ ② $\supset$ ③ $\in$ ④ $\ni$ ⑤ $=$

해설

$A = \{1, 2, 3, 6\}$,
$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$



2. 두 집합 $A = \{2,\ 5,\ 9,\ a\}$, $B = \{3,\ 7,\ b+2,\ b-2\}$에 대하여 $A - B = \{2,\ 8\}$일 때, $a - b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

집합 A에서 $a = 8$이고,
$A \cap B = \{5,\ 9\}$이므로
(i) $b + 2 = 5$ 일 때, $b = 3$이므로
$B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\} \Rightarrow A \cap B = \{5\}$ (×)
(ii) $b - 2 = 5$일 때, $b = 7$이므로
$B = \{3,\ 5,\ 7,\ 9\} \Rightarrow A \cap B = \{5,\ 9\}$ (○)
$\therefore\ a - b = 8 - 7 = 1$

3. 전체집합 $U = \{x | x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x | x\text{는 홀수}\}$, $B = \{1, 3, 4, 8\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A \cap B^c = \{5, 7, 9\}$
② $A \cap B = \{1, 3\}$
③ $B - A = \{4, 8\}$
④ $(A \cup B)^c = \{2, 6, 10\}$
⑤ $A^c \cap B^c = \{2, 10\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 3, 4, 8\}$ 이므로

⑤ $A^c \cap B^c = \{2, 6, 10\}$

4. 교내 미술대회에 우리 반 35 명의 학생 중 풍경화를 제출한 학생이 19 명이고 , 정물화를 제출한 학생은 15 명이다. 아무것도 제출하지 않은 학생은 3 명일 때, 풍경화와 정물화를 모두 제출한 학생 수는?

① 1명　② 2명　③ 3명　④ 4명　⑤ 5명

해설

$n(U) = 35, n(A) = 19, n(B) = 15$
$n(A \cup B) = 35 - 3 = 32$ 이다.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 이므로 $32 = 19 + 15 - n(A \cap B)$ 이다.
따라서 $n(A \cap B) = 2$ 이다.

5. 다음 보기에서 참인 명제의 개수는?

보기

㉠ $A \subset B$ 이면 $A - B = \varnothing$ 이다.

㉡ $A \subset (B \cup C)$ 이면 $A \subset B$ 또는 $A \subset C$ 이다.

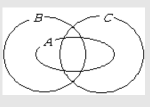
㉢ 4 의 배수는 12 의 배수이다.

㉣ 12 의 배수는 4 의 배수이다.

㉤ a, b 가 자연수일 때, a, b 가 홀수이면 $a + b$ 는 짝수이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉡ (반례) 

이면 $A \subset (B \cup C)$ 이지만 $A \not\subset B$ 이고 $A \not\subset C$ 이므로 거짓이다.

㉢ (반례) 8 은 4 의 배수이지만 12 의 배수는 아니므로 거짓이다.
따라서 참인 명제는 3개이다.

6. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$에 대하여 $p \rightarrow q$가 참일 때 a의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

해설

$p \rightarrow q$는 $\sim q \rightarrow \sim p$와 동치임을 이용
$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.
$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$,
$x = -3,\ 1$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.
1) $x = -3\ : 9 + 3a - 6 \leq 0 \ \rightarrow\ a \leq -1$
2) $x = 1\ : 1 - a - 6 \leq 0 \ \rightarrow\ a \geq -5$
$\therefore\ -5 \leq a \leq -1$
따라서, $-5 + (-1) = -6$

7. 0이 아닌 실수 a에 대하여 $(6a+\frac{1}{a})(24a+\frac{1}{a})$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 54

해설

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$(6a+\frac{1}{a})(24a+\frac{1}{a}) = 144a^2+\frac{1}{a^2}+30 \geq 2\sqrt{144a^2\times\frac{1}{a^2}}+30 = 30+24 = 54$

8. $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=5$을 만족하는 x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=1-\dfrac{x-1}{x-1-x}$$
$$=1+x-1=x$$
$\therefore x=5$

9. $4x^2-4xy+y^2=0$일 때, $\dfrac{8x^2-xy+3y^2}{x^2+2y^2}$의 값을 구하면? (단, x, y는 0이 아니다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$4x^2-4xy+y^2=0$, $(2x-y)^2=0$에서 $2x-y=0$

$\therefore\ y=2x$

$$\frac{8x^2-xy+3y^2}{x^2+2y^2}$$

$$=\frac{8x^2-x\cdot 2x+3\cdot 4x^2}{x^2+8x^2}$$

$$=\frac{18x^2}{9x^2}=2$$

10. $N = \dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}\right)^2$

$= \dfrac{\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2+2}{\sqrt{5}+1}$

$= \dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{5}+1} = 2$이므로

$\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} = \sqrt{2}$

또, $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$이므로

$N = \sqrt{2} - (\sqrt{2}-1) = 1$

11. $6-\sqrt{3}$의 정수 부분을 x, 소수부분을 y라 할 때 $\frac{1}{x}\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)$의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$6-\sqrt{3}=4+(2-\sqrt{3})\ (\because 0<2-\sqrt{3}<1)$

$\therefore x=4,\ y=2-\sqrt{3},\ \frac{1}{y}=2+\sqrt{3}$

$\therefore y+\frac{1}{y}=4,$

$y^3+\frac{1}{y^3}=\left(y+\frac{1}{y}\right)^3-3\left(y+\frac{1}{y}\right)=52$

$\therefore \frac{1}{x}\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)=\frac{1}{4}\cdot 52=13$

12. 무리함수 $y = \sqrt{2x+3}$ 의 그래프가 직선 $y = x+k$ 와 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $\frac{3}{2} < k < 2$ ② $\frac{3}{2} \le k < 2$ ③ $\frac{3}{2} \le k \le 2$
④ $\frac{3}{2} < k \le 2$ ⑤ $1 \le k < 2$

해설

(i) 두 그래프가 접할 때, $\sqrt{2x+3} = x+k$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 + 2(k-1)x + k^2 - 3 = 0$

이것이 중근을 가지므로

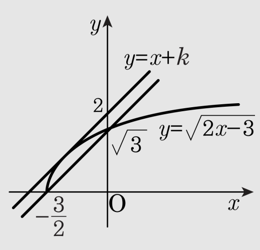
$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k^2-3) = -2k+4 = 0$

$\therefore\ k = 2$

(ii) 직선 $y = x+k$가 점 $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지날때

$0 = -\frac{3}{2} + k$

$\therefore\ k = \frac{3}{2}$



(i), (ii)와 위의 그림으로부터 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 k 값의 범위는

$\frac{3}{2} \le k < 2$

13. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2,\ a_n + a_{n+1} = 3n\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의된다. 이때, 두 수 $P = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{19},\ Q = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{20}$에 대하여 $P - Q$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$n = 1$일 때, $a_1 = 2,\ a_1 + a_2 = 3 \ \therefore a_2 = 1$
$n = 2$일 때, $a_2 + a_3 = 6 \ \therefore a_3 = 5$
$n = 3$일 때, $a_3 + a_4 = 9 \ \therefore a_4 = 4$
$\therefore a_{2n-1} - a_{2n} = 1 (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$
$\therefore P - Q = \sum_{k=1}^{10} (a_{2n-1} - a_{2n}) = 10$

14. 다음은 모든 자연수 n에 대하여
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$가 성립함을
수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$일 때, (좌변)$= 1 \cdot 2 = 2$, (우변)$= (1-1) \cdot 2^2 + 2 = 2$
이므로 주어진 등식이 성립한다.
(ii) $n = k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$
이 식의 양변에 $\boxed{(가)}$을 더하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(가)}$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(가)}$
$= \boxed{(나)} \cdot 2^{k+2} + 2$
따라서, $n = k + 1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

② (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

③ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : k

④ (가) : $k \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

⑤ (가) : $(k+1) \cdot 2^{k+1}$, (나) : $k+1$

해설

(ii) $n = k$일 때, 등식이 성립한다고 가정하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$
이 식의 양변에 $\boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$을 더하면
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + \boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$
$= (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + \boxed{(k+1) \cdot 2^{k+1}}$
$= \boxed{k} \cdot 2^{k+2} + 2$
따라서, $n = k + 1$일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

15. $P = \dfrac{9^3 \cdot 81^{-3} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6} \cdot 9^2}$ 에 대하여 $\sqrt[4]{P}$ 의 값은?

① $3\sqrt[4]{9}$ ② $9\sqrt[4]{3}$ ③ $9\sqrt[4]{9}$ ④ $9\sqrt[4]{27}$ ⑤ 81

해설

$$P = \frac{9^3 \cdot 81^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6} \cdot 9^2} = \frac{(3^2)^3 \cdot (3^4)^{-3} \cdot 3^3}{(3^3)^{-6} \cdot (3^2)^2}$$

$$= \frac{3^6 \cdot 3^{-12} \cdot 3^3}{3^{-18} \cdot 3^4}$$

$$= \frac{3^{-3}}{3^{-14}}$$

$$= 3^{-3-(-14)} = 3^{11}$$

$$\therefore \sqrt[4]{P} = \sqrt[4]{3^{11}} = 9\sqrt[4]{3^3} = 9\sqrt[4]{27}$$

16. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$ 의 값이 존재하기 위한 실수 x의 범위는?

① $-1 < x < 3$　② $0 > x$　③ $2 < x < 5$　④ $3 < x < 4$　⑤ $5 < x < 7$

해설

밑의 조건에서 $x-3>0, x-3 \neq 1$
따라서 $x>3, x \neq 4 \cdots$ ㉠
진수의 조건에서 $-x^2+6x-8>0$
$x^2-6x+8<0$
$(x-2)(x-4)<0$
따라서 $2<x<4 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 의 공통범위를 구하면 $3<x<4$

17. 다음 상용로그표를 이용하여 $\log \sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분을 구하여라.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732

▶ 답 :

▷ 정답 : 0.7164

해설

상용로그표에서 $\log 1.41 = 0.1492$ 이므로

$$\log \sqrt[3]{0.141} = \frac{1}{3}\log 0.141 = \frac{1}{3}\log\left(1.41 \times 10^{-1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}(\log 1.41 - 1) = \frac{1}{3}(0.1492 - 1)$$
$$= -0.2836 = -1 + 0.7164$$

따라서 $\log \sqrt[3]{0.141}$ 의 소수 부분은 0.7164 이다.

18. 두 집합
$A = \{x \mid x$는 100 이상 200 이하 15의 배수$\}$,
$B = \{x \mid x$는 80 보다 작은 2의 배수$\}$ 일 때,
$n(B) - n(A)$는?

① 10 ② 14 ③ 19 ④ 27 ⑤ 32

해설
$n(A) = 7,\ n(B) = 39$
$n(B) - n(A) = 39 - 7 = 32$

19. 집합 $A = \{x \mid 7 < x < 15,\ x$는 자연수$\}$ 에 대해서, 원소 8 또는 9 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하시오.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 96 개

해설

$A = \{8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14\}$
원소 8 을 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{7-1} = 64$ (개)
원소 9 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{7-1} = 64$ (개)
원소 8, 9 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$2^{7-2} = 32$ (개)
원소 8 또는 9 를 포함하는 부분집합의 개수 :
$64 + 64 - 32 = 96$ (개)

20. 세 집합 A, B, C 에 대하여 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

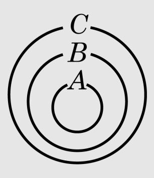
② $A \subset B$, $B = C$ 이면 $A \subset C$ 이다.

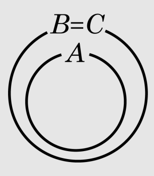
③ $A \subset B$, $B \subset C$ 이면 $A = B$ 이다.

④ $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset A$ 이면 $A = C$ 이다.

⑤ $A \subset B \subset C$ 이면 $n(A) < n(B) < n(C)$ 이다.

해설

① 

② 

③ 예를 들어 $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1,\ 2,\ 3\}$ 이면 $A \subset B$, $B \subset C$ 이지만 $A \neq B$

④ $A \subset B$, $B \subset C$, $C \subset A$ 이면 $A = B = C$

⑤ $A \subset B \subset C$ 이면 $n(A) \leq n(B) \leq n(C)$

21. 다음 [보기] 에서 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $n(\{0\}) = 0$	㉡ $\phi \subset \{\varnothing\}$	㉢ $4 \subset \{1,\ 2\}$
㉣ $0 \subset \{0\}$	㉤ $0 \in \varnothing$	㉥ $0 \notin \varnothing$

① ㉡,㉥ ② ㉡,㉤ ③ ㉠,㉡ ④ ㉢,㉤ ⑤ ㉤,ⓞ

해설

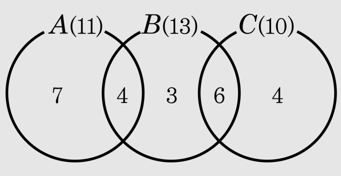
㉠ $n\{\ (0)\ \} = 1$
㉢ $4 \notin \{1, 2\}$
㉣ $0 \in \{0\}$
㉤ $0 \notin \varnothing$

22. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 11$, $n(B) = 13$, $n(C) = 10$, $n(A \cap B) = 4$, $n(B \cup C) = 17$, $A \cap C = \varnothing$ 일 때, $A \cup B \cup C$ 의 원소의 개수는?

① 12 ② 17 ③ 24 ④ 30 ⑤ 34

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore\ n(A \cup B \cup C) = 24$

23. 집합 $A=\{2,3\times a,a+3\}$, $B=\{a,2\times a+1,3\times a-2\}$ 이고 $A-B=\{6\}$ 일 때, $C=\{1,2,3\}$ 에 대하여 $(A-C)\cup(B\cap C)$ 는?

① $\{2,4\}$　② $\{2,5\}$　③ $\{2,6\}$

④ $\{2,5,6\}$　⑤ $\{2,6,7\}$

해설

$A-B=\{6\}$ 이므로

(1) $3\times a=6$ 일 때, $a=2$ 이다.

따라서 $A=\{2,5,6\}$, $B=\{2,4,5\}$ 이고 $C=\{1,2,3\}$ 이므로

$(A-C)\cup(B\cap C)=\{5,6\}\cup\{2\}=\{2,5,6\}$ 이다.

(2) $a+3=6$ 일 때, $a=3$ 이다.

따라서 $A=\{2,6,9\}$, $B=\{3,7\}$ 이므로 $A-B=\{2,6,9\}\neq\{6\}$ 이므로 조건에 맞지 않다.

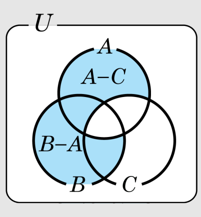
따라서 (1),(2) 에서 $(A-C)\cup(B\cap C)=\{2,5,6\}$ 이다.

24. 전체집합 $U = \{x \mid x \le 100\text{인 자연수}\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 4\text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x\text{는 } 5\text{의 배수}\}$, $C = \{x \mid x\text{는 } 6\text{의 배수}\}$ 에 대하여 $n((A^c \cap B) \cup (A - C))$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설



$A^c \cap B = B - A$ 이므로

$(B - A) \cap (A - C) = \varnothing$

$\therefore n((A^c \cap B) \cup (A - C)) = n(A^c \cap B) + n(A - C)$

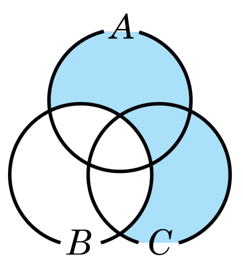
$n(A^c \cap B) = n(B - A) = n(B) - n(B \cap A)$

$= 20 - 5 = 15$

$n(A - C) = n(A) - n(A \cap C) = 25 - 8 = 17$

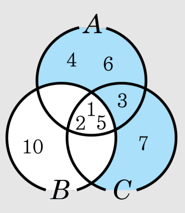
$\therefore 15 + 17 = 32$

25. 다음 그림에서 색칠한 부분의 집합을 나타낸 것은?



① $(A \cap B) - C$　② $(A \cap C) - B$　③ $(A \cup B) - C$　④ $(A \cup C) - B$　⑤ $(B \cup C) - A$

해설



색칠한 부분을 집합으로 나타내면 $(A \cup C) - B$ 이다.

26. 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$에 대하여 함수 $f : A \to A$ 를

$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \le 2\text{일 때}) \\ 0 & (x > 2\text{일 때}) \end{cases}$ 라 정의하자. 이 때, $f^{2006}(1) - f^{2006}(3)$

의 값은? (단, $f^2 = f \circ f$, $f^{n+1} = (f \circ f^n)$ 이다.)

① −2 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

1) $f(1) = 2,\ f^2(1) = 3,\ f^3(1) = 0,\ f^4(1) = 1 \cdots$

$\Rightarrow f^{2004}(1) = (f^4)^{501}(1) = 1$

$\therefore\ f^{2006}(1) = f^2(1) = 3$

2) $f(3) = 0,\ f^2(3) = 1,\ f^3(3) = 2,\ f^4(3) = 3,\ f^5(3) = 0 \cdots$

$\Rightarrow f^{2004}(3) = (f^4)^{501} = 3$

$\therefore f^{2006}(3) = f^2(3) = 1$

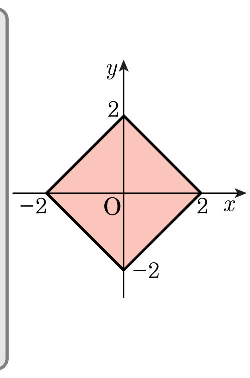
$\therefore f^{2006}(1) - f^{2006}(3) = 2$

27. $|x|+|y|=2$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$|x|+|y|=2$ 의 그래프는
$x+y=2$ 의 그래프에서
$x \geq 0,\ y \geq 0$ 인 부분을
각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭 이동한 것이므로 다음 그림과 같다.
따라서 구하는 도형의 넓이는 $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 8$



28. 함수 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 의 최솟값을 m , 그 때의 x 의 값을 n 이라 할 때, 상수 $m,\ n$ 의 곱 mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 에서

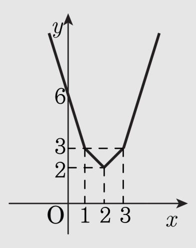
(i) $x \geq 3$ 일 때, $y = x-1+x-2+x-3 = 3x-6$

(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $y = x-1+x-2-(x-3) = x$

(iii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x-1-(x-2)-(x-3) = -x+4$

(iv) $x < 1$ 일 때, $y = -(x-1)-(x-2)-(x-3) = -3x+6$

따라서 $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고



$x = 2$ 일 때 최솟값이 2이므로 $m = 2,\ n = 2$

$\therefore mn = 4$

29. $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n$ 이라 정의 할 때, $\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{2k+1}\right)$를 계산하면?

① $\frac{1}{2n-1}$ ② $\frac{1}{2n+1}$ ③ $\frac{n}{2n-1}$
④ $\frac{n}{2n+1}$ ⑤ $\frac{2n-1}{2n+1}$

해설

$1-\frac{2}{2k+1}=\frac{2k-1}{2k+1}$ 이므로

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{2k+1}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\cdots\times\frac{2n-3}{2n-1}\times\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}$$

30. 다항함수 $f(x)=\dfrac{x-a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x-b}{(b-c)(b-a)}$
$+\dfrac{x-c}{(c-a)(c-b)}$ 일 때, $f(2013)$ 의 값은?

① $a+b+c$　② $a^2+b^2+c^2$　③ $a^3+b^3+c^3$
④ $ab+bc+ca$　⑤ 0

해설

주어진 식을 통분하면
(분자)
$=\{(x-a)(b-c)+(x-b)(c-a)+(x-c)(a-b)\}$
$=(b-c+c-a+a-b)x$
$+(-ab+ac-bc+ab-ca+cb)=0$
$\therefore\ f(x)=0\quad \therefore f(2013)=0$

해설

주어진 식의 분모는 0이 아니므로
$a,\ b,\ c$는 서로 다른 수이고
$f(a)=\dfrac{a-b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a-c}{(c-a)(c-b)}$
$=\dfrac{-1}{b-c}+\dfrac{1}{b-c}=0$
$f(b)=\dfrac{b-a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b-c}{(c-a)(c-b)}$
$=\dfrac{-1}{a-c}+\dfrac{1}{a-c}=0$
그런데 $f(x)$는 일차이하의 함수이고
$f(a)=f(b)=0$이므로
모든 실수 x에 대하여 $f(x)=0$이다.
$\therefore\ f(2013)=0$

31. $a+b \le 100$이고 $\dfrac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b}=13$을 만족하는 양의 정수 쌍 $(a,\ b)$의 개수는?

① 1개　② 5개　③ 7개　④ 9개　⑤ 13개

해설

$\dfrac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b}=13$

분모, 분자에 ab를 곱하면

$\dfrac{a^2b+a}{b+ab^2}=\dfrac{a(ab+1)}{b(1+ab)}=\dfrac{a}{b}=13$

$\therefore\ a=13b$

$a+b \le 100$에 대입하면

$14b \le 100,\ 0<b \le \dfrac{100}{14}<8$

따라서 $b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$이므로

$(a,\ b)$의 개수는 7개

32. $-1 \le x \le -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때, $\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1+2x\sqrt{1-x^2}}$ 을 간단히 하면?

① 0　② $\sqrt{1-x^2}$　③ $-\sqrt{1-x^2}$

④ $2\sqrt{1-x^2}$　⑤ $-2\sqrt{1-x^2}$

해설

(준식)

$= \sqrt{1-2\sqrt{x^2(1-x^2)}} - \sqrt{1+2\sqrt{x^2(1-x^2)}}$

주어진 범위에서 $x^2 \ge 1-x^2$ 이므로

$(\sqrt{x^2} - \sqrt{1-x^2}) - (\sqrt{x^2} + \sqrt{1-x^2})$

$= -2\sqrt{1-x^2}$

33. $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}, y=\sqrt{2-\sqrt{3}}$일 때, $\frac{y^3}{x}+\frac{x^3}{y}$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

$xy=\sqrt{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})}=1$

$x^2=2+\sqrt{3} \quad y^2=2-\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{y^3}{x}+\frac{x^3}{y}=\frac{x^4+y^4}{xy}$

$=\frac{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2}{1}=14$

34. $x,\ y$가 유리수일 때, $[x,\ y] = \sqrt{2}x + y$로 정의하자. 유리수 $a,\ b$가 $[2a,\ 2b] + 1 = [b,\ a] - 2$를 만족할 때, $a + b$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$[2a,\ 2b] + 1 = \sqrt{2}(2a) + 2b + 1$

$[b,\ a] - 2 = \sqrt{2}b + a - 2$

$\therefore\ (2b+1) + 2a\sqrt{2} = (a-2) + b\sqrt{2}$

$\begin{cases} 2b + 1 = a - 2 \\ 2a = b \end{cases}$ 에서

$a = -1,\ b = -2$

$\therefore\ a + b = -1 - 2 = -3$

35. 함수 $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ 의 그래프에서 점근선의 방정식을 $x = a,\ y = b$라 할 때, 함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 역함수의 최솟값을 구하면?

① -1　　② $-\dfrac{1}{2}$　　③ $\dfrac{1}{2}$　　④ 1　　⑤ $\dfrac{3}{2}$

해설

$y = \dfrac{x+1}{x-2} = 1 + \dfrac{3}{x-2}$

$\therefore$ 점근선은 $x = 2,\ y = 1$

$\therefore\ a = 2,\ b = 1$

$y = \sqrt{2x+1}$ 의 $\left(x \geq -\dfrac{1}{2}\right)$ 역함수는

$y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\ \ (x \geq 0)$

$\therefore$ 최솟값은 $-\dfrac{1}{2}$

36. 12와 18로 나누어떨어지는 세 자리의 자연수의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13500

해설

12와 18로 나누어떨어지는 수는 12와 18의 최소공배수인 36으로 나누어떨어지는 수이므로 $36n$(n은 자연수)의 꼴이다.
이때, $100 \le 36n \le 1000$이므로
$2.\times\times \le n \le 27.\times\times$
$\therefore\ n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 27$
$n = 3$일 때, $36n = 108$
$n = 27$일 때, $36n = 972$이므로
조건을 만족하는 수열은 첫째항이 108, 끝항이 972, 항수가 $27 - 2 = 25$인 등차수열을 이룬다.
따라서 구하는 총합은
$$\frac{25(108 + 972)}{2} = 13500$$

37. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음과 같이 정의되어 있다.
$a_n = 2n+1,\ b_n = 3n+2(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에서 공통인 항을 작은 것부터 순서대로 나열한 수열을 $\{c_n\}$이라 한다. 이때, C_{20}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 119

해설

$a_2 = b_1 = 5,\ a_5 = b_3 = 11,\ a_8 = b_5 = 17, \cdots$ 이므로 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 5, 공차가 6인 등차수열이다.

$\therefore\ c_{20} = 5 + 19 \cdot 6 = 119$

38. x에 대한 이차방정식 $x^2+4x-(2n-1)(2n+1)=0$의 두근 α_n, β_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값은?

① $\frac{11}{21}$ ② $\frac{20}{21}$ ③ $\frac{31}{21}$ ④ $\frac{40}{21}$ ⑤ $\frac{50}{21}$

해설

$\alpha_n+\beta_n=-4$

$\alpha_n\beta_n=-(2n-1)(2n+1)$

$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)}$

$\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\sum_{k=1}^{10}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$

$=4\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{4}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=2\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$

39. 수열 $2,\ 3,\ 5,\ 9,\ 17, \cdots$ 의 제 10항 까지의 합은?

① 2^9-1 ② 2^9+1 ③ 2^9+9

④ $2^{10}-1$ ⑤ $2^{10}+9$

해설

$$\begin{array}{ccccccccc} 2, & & 3, & & 5, & & 9, & & 17 \\ & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\ & 1 & & 2 & & 4 & & 8 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\ &= 2 + \frac{1 \cdot (2^{n-1}-1)}{2-1} \\ &= 2 + 2^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

$a_n = 2^{n-1}+1$

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{1(2^{10}-1)}{2-1} + 10 \\ &= 2^{10} - 1 + 10 = 2^{10} + 9 \end{aligned}$$

40. n이 자연수일 때, $n+(n-1)2+(n-2)2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-2}+2^{n-1}$의 값은?

① 2^{n+1} ② $2^{n+1}-n$ ③ $2^{n+1}-n-2$

④ 2^n+n2 ⑤ $2^n n+2$

해설

주어진 식의 값을 S 라 하면

$S=n+(n-1)2+(n-2)2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-2}+2^{n-1}$

멱급수의 형태이므로 양변에 2를 곱하여 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rrl} & 2S = & n\cdot 2+(n-1)2^2+\cdots+2\cdot 2^{n-1}+2^n \\ -) & S = & n+(n-1)2+(n-2)2^2+\cdots+2^{n-1} \\ \hline & S = & -n+2+2^2+\cdots+2^{n-1}+2^n \end{array}$$

$$\therefore S=-n+\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}-n-2$$

41. 자연수로 이루어진 순서쌍의 수열 $(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (1,\ 4),$ $(2,\ 3),\ (3,\ 2)\ (4,\ 1),\ (1,\ 5),\cdots$ 에서 두 수가 모두 한 자리의 자연수로 이루어진 순서쌍의 총 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 81

해설

주어진 수열을 순서쌍의 두 수의 합이 같은 것 끼리 군을 묶으면
$(1,\ 1) |\ (1,\ 2),\ (2,\ 1) |\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)|,\cdots$
이 때, 각 군에서 모든 항의 순서쌍의 두 수가 한 자리의 자연수인 군의 수를 구하기 위해 두수의 합이 10이 되는 것부터 세면
$1+2+3+\cdots+10=\dfrac{9\cdot 10}{2}=45\cdots$ ㉠
두 수의 합이 11인 순서쌍의 개수는 10이고, 이중 한 자리의 자연수로만 이루어진 순서쌍은$(1,\ 10),\ (10,\ 1)$을 제외한 8개다.
같은 방법으로 두 수의 합이 12인 순서쌍의 개수는 11이고, 이중 한 자리의 자연수로만 이루어진 순서쌍은 $11-4=7$(개)이다.
두 수의 합이 18로 이루어진 순서쌍 중 한 자리의 자연수로만 이루어진 순서쌍의 개수는 $17-16=1$(즉, $(9,\ 9)$)이므로 모두
$(10-2)+(11-4)+(12-6)+(13-8)+(14-10)$
$+(15-12)+(16-14)+(17-16)$
$=8+7+6+\cdots+1=\dfrac{8\cdot 9}{2}=36\cdots$ ㉡
따라서, ㉠, ㉡에서 두 수가 모두 한자리의 자연수로 이루어진 순서쌍의 총 개수는 81이다.

42. 한 변의 길이가 1인 정사각형 R_1의 왼쪽 변에 같은 크기의 정사각형 R_2를 붙이고, 붙여진 두 정사각형이 만든 직사각형의 위쪽에 한 변의 길이가 2인 정사각형 R_3를 붙이고, 다시 붙여진 3개의 정사각형으로 만들어진 직사각형의 오른쪽에 한 변의 길이가 3인 정사각형 R_4를 붙인다. 이와 같이 계속하여 정사각형을 시계 방향으로 붙여나간다. 정사각형 R_n의 한 변의 길이를 a_n(n은 자연수)이라 할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a_{10} = 55$

㉡ $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = a_{12}$

㉢ $a_{n+2}^2 = a_{n+1}^2 + a_n^2$

① ㉠　② ㉢　③ ㉠, ㉡　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ 앞서 만들어진 두 정사각형의 한 쪽에 다음 정사각형이 붙여지므로 앞의 두 정사각형 각각의 한 변의 길이를 더하면 다음 정사각형의 한 변의 길이가 된다. 즉, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$
수열 a_n을 차례로 구하면
$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \cdots\ \therefore\ a_{10} = 55$(참)
㉡ $a_1+a_2 = a_3,\ a_2+a_3 = a_4,\ a_3+a_4 = a_5, \cdots,\ a_{10}+a_{11} = a_{12}$
변끼리 더하면
$(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+(a_2+a_3+\cdots+a_{11}) = (a_3+a_4+\cdots+a_{12})$
$\Leftrightarrow\ (a_1+a_2+\cdots+a_{10})+a_2 = a_{12}$
$\therefore\ a_1+a_2+\cdots+a_{10} = a_{12}-1$(거짓)
㉢ ${a_1}^2 = 1,\ {a_2}^2 = 1,\ {a_3}^2 = 4$
$\therefore\ {a_3}^2 \neq {a_1}^2 + {a_2}^2$(거짓)

43. 뚜껑이 없는 커다란 통이 있다. 첫째 날 아침에 이 물통에 100L 의 물을 넣고, 둘째 날부터는 매일 아침 일정한 시각에 이 물통에서 1L 의 물을 가져가기로 하였다. 또, 아침에 물을 가져가고 난 후 물통에 남아 있는 물의 1%가 하루 동안 증발하여 없어진다고 한다. n일 째 되는 날 아침에 물통에서 1L 의 물을 가져가고 난 직후에 측정한 물의 양을 a_nL, 1L 의 물을 가져가고 난 직후에 측정한 물의 양을 b_nL 라고 하자. 예를 들면 $a_2 = 99$ 이다. 이때, 등식 $b_{n+1} = pa_n + q$를 만족하는 두 상수 p, q 에 대하여 $p+q$의 값은? (단, 아침에 남아있는 물의 양이 1L 이상인 날까지만 측정한다.)

① 2　② 0.99　③ −0.99　④ −1　⑤ −1.99

해설

n째 날 물을 가져가기 직전에 측정한 물의 양이 a_n 이므로 물을 가져간 직후의 양은
$b_n = a_n - 1$ 이다.
이때, 이 물의 양의 1%가 증발하므로 $(n+1)$째 날 물을 가져가기 직전에 측정한 양 a_{n+1} 은
$a_{n+1} = 0.99(a_n - 1) = 0.99a_n - 0.99 \cdots$ ㉠
이 때, $a_{n+1} = b_{n+1} + 1$ 이므로 ㉠에 대입하면
$b_{n+1} = 0.99a_n - 1.99$
따라서 $p = 0.99$, $q = -1.99$ 이므로
$p + q = -1$

44. 비어 있는 물탱크에 물을 채우려고 한다. 첫째 날은 7L의 불을 채우고, 다음 날부터 전날 채운 물의 양의 $\frac{4}{3}$배보다 1L 적은 양을 채우기로 하였다. 열 번째 날 물탱크에 채우는 물의 양은?

① $4\left(\frac{2}{3}\right)^{10}+3\text{L}$ ② $4\left(\frac{3}{4}\right)^{9}+3\text{L}$ ③ $4\left(\frac{3}{5}\right)^{9}+3\text{L}$
④ $4\left(\frac{4}{3}\right)^{10}+3\text{L}$ ⑤ $4\left(\frac{5}{3}\right)^{10}+3\text{L}$

해설

첫째 날에 물탱크에 채우는 물의 양을 a_1이라 하면 $a_1=7$
n번째 날에 물탱크에 채우는 물의 양을 a_n이라 하면

$a_1=7,\ a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n-1$

이때, $a_{n+1}-\alpha=\frac{4}{3}(a_n-\alpha)$라 하면 $-\frac{1}{3}\alpha=-1,\ \ \alpha=3$

$\therefore a_{n+1}-3=\frac{4}{3}(a_n-3)$

따라서 수열 $\{a_n-3\}$은 첫째항이 $a_1-3=7-3=4$, 공비가 $\frac{4}{3}$인 등비수열이므로

$a_n-3=4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ $\therefore a_n=4\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}+3$

$\therefore a_{10}=4\left(\frac{4}{3}\right)^{10-1}+3=4\left(\frac{4}{3}\right)^{9}+3(\text{L})$

45. 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 있다. 명제 $p(n)$이 모든 짝수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(i) $p(a)$가 참이다. (ii) $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+b)$도 참이다.

이때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

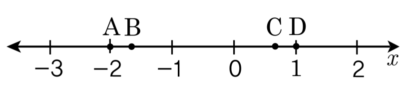
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

짝수는 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열을 이루므로 $p(2)$이 참임을 증명한다.
k가 짝수이면 그 다음 짝수는 $k+2$이므로 $p(k)$가 참이라 가정하면 $p(k+2)$가 참임을 증명해야 한다.
$\therefore a=2,\ \ b=2$
$\therefore a+b=4$

46. 다음 그림과 같이 수직선 위에 네 점 $A(-2)$, $B(\log a)$, $C(\log b)$, $D(1)$ 이 있다.



$-2 < \log a < -1$, $0 < \log b < 1$, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}}$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a + b = 1$　② $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{10}$　③ $\dfrac{b}{a} = 10$

④ $ab = \dfrac{1}{10}$　⑤ $ab = 10$

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}}$이므로 $\log a + 2 = 1 - \log b$

$\log a + \log b = \log ab = -1$

$ab = \dfrac{1}{10}$

47. $\triangle$ABC의 세 변 a, b, c에 대하여
$\log_{(a+b)} c + \log_{(a-b)} c = 2\log_{(a+b)} c \cdot \log_{(a-b)} c$와 같은 관계가 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가? (단, $a > b, c \neq 1$)

① 정삼각형

② $b = c$인 이등변삼각형

③ $a = c$인 이등변 삼각형

④ a를 빗변으로 하는 직각삼각형

⑤ b를 빗변으로 하는 직각삼각형

해설

밑의 변환 공식을 이용하면

$$\frac{1}{\log_c(a+b)} + \frac{1}{\log_c(a-b)}$$

$$= \frac{2}{\log_c(a+b) \cdot \log_c(a-b)}$$

양변에 $\log_c(a+b) \cdot \log_c(a-b)$를 곱하면

$$\log_c(a-b) + \log_c(a+b) = 2\log_c c$$

$$\log_c(a-b)(a+b) = \log_c c^2$$

로그의 정의에 의해

$$(a-b)(a+b) = c^2, a^2 - b^2 = c^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 $\triangle$ABC는 a를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

48. 이차방정식의 $x^2 - kx + 3 = 0$ 의 두 근이 $\log A$ 의 정수 부분과 소수 부분이다. 양수 A 의 정수 부분이 5자리의 수일 때, 양수 A 의 최고 자리의 숫자는? (단, k는 상수이고, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$로 계산한다.)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$\log A$ 의 소수 부분을 $a(0 \le a < 1)$ 라 하면
$\log A = 4 + \alpha$
이때, 정수 부분 4와 소수 부분 α가 이차방정식 $x^2 - kx + 3 = 0$ 의 두 근이므로
$4 + \alpha = k,\ 4\alpha = 3$
$\therefore \alpha = \frac{3}{4},\ k = \frac{19}{4}$
$\log A = 4 + \frac{3}{4} = \log 10^4 + 0.75$
한편 $\log 5 = 0.6990,\ \log 6 = \log 2 + \log 3 = 0.7781$
이므로 $\log 5 < 0.75 < \log 6$
$5 \times 10^5 < A < 6 \times 10^5$
따라서 A 의 최고 자리의 숫자는 5이다.

49. $2^{20} \cdot 3^{30}$ 의 맨 첫 자리의 수를 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\log(2^{20} \cdot 3^{30})$
$= 20 \times \log 2 + 30 \times \log 3$
$= 20.333$
$20.3010 < 20.333 < 20.4771$
$\log(10^{20} \times 2) < \log(2^{20} \cdot 3^{30}) < \log(10^{20} \times 3)$
$2 \times 10^{20} < 2^{20} \cdot 3^{30} < 3 \times 10^{20}$
이므로 첫 자리의 수는 2

50. 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 $\log a$와 $\log b$의 정수 부분이 같고 소수 부분의 합이 1이다. $\log a^3b^2$의 정수 부분이 17일 때, ab의 값은?

① 10^5　② 10^6　③ 10^7　④ 10^8　⑤ 10^9

해설

$\log a$와 $\log b$의 정수 부분이 같으므로

$\log a = n + \alpha (0 \le \alpha < 1), \log b = n + \beta (0 \le \beta < 1)$라 하자.

$\log a^3b^2 = 3\log a + 2\log b$

$= 3(n+\alpha) + 2(n+\beta)$

$= 5n + 3\alpha + 2\beta$

$= 5n + 2(\alpha+\beta) + \alpha$

$= 5n + 2 + \alpha (\because \ \alpha + \beta = 1)$

$\log a^3b^2$의 정수 부분이 17이므로 $5n + 2 = 17$

$5n = 15, \ n = 3$

따라서 $\log a = 3 + \alpha, \ \log b = 3 + \beta$이므로

$a = 10^{3+\alpha}, \ b = 10^{3+\beta}$

$ab = 10^{3+\alpha} \cdot 10^{3+\beta} = 10^{\alpha+\beta+6} = 10^7$