**1.** $x^3+2x^2+3x+1=0$의 세 근을 $\alpha,\beta,\gamma$라 한다. $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$일 때, $abc$의 값을 구하면?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0$의
세 근이 $\alpha,\beta,\gamma$이므로
$\alpha+\beta+\gamma=-2$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$,
$\alpha\beta\gamma=-1$
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-3$,
$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2$,
$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$
따라서 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
$x^3+3x^2+2x+1=0$
$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx+c=0$
$\therefore a=3, b=2, c=1$

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0 \cdots\cdots$ ①
$x=\frac{1}{X}$로 놓으면
$\left(\frac{1}{X}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{X}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{X}\right)+1=0$
$\therefore\ X^3+3X^2+2X+1=0 \cdots\cdots$ ②
①의 세 근이 $\alpha,\beta,\gamma$이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$이다.
∴구하는 방정식은
$X^3+3X^2+2X+1=0$에서
$abc=3\cdot2\cdot1=6$

**2.** 연립방정식 $x+y+z=-\frac{1}{2}$, $xy+yz+zx=-\frac{5}{2}$, $xyz=-1$을 만족시키는 해의 쌍 $(x, y, z)$의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

근과 계수와의 관계에서
$x,\ y,\ z$를 세 근으로 하는
삼차방정식을 만들면

$t^3+\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}t+1=0$

$\Leftrightarrow 2t^3+t^2-5t+2=0$

$\Leftrightarrow (t-1)(2t-1)(t+2)=0$

$\therefore\ (x, y, z)=$

$\left(1, \frac{1}{2}, -2\right)$, $\left(1, -2, \frac{1}{2}\right)$,

$\left(\frac{1}{2}, 1, -2\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -2, 1\right)$,

$\left(-2, 1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$

**3.** 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 3 = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}i$ 일 때, 두 실수 $a, b$ 의 곱 $ab$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$ )

① $-15$  ② $-10$  ③ $0$  ④ $5$  ⑤ $10$

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}i$이므로 켤레근은 $1 - \sqrt{2}i$
세 근이 $\alpha, \beta, \gamma$일때 $\alpha\beta\gamma = 3$이므로, $\alpha = 1 + \sqrt{2}i$ , $\beta = 1 - \sqrt{2}i$
라 하면, $(1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) \cdot \gamma = 3$
$3 \cdot \gamma = 3$
$\gamma = 1$
$\alpha + \beta + \gamma = -a = (1 + \sqrt{2}i) + (1 - \sqrt{2}i) + 1 = 3$
$a = -3$
$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\beta = b = 3 + (1 - \sqrt{2}i) \cdot 1 + 1 \cdot (1 + \sqrt{2}i) = 5$
$b = 5$
$\therefore\ ab = (-3) \cdot 5 = -15$

**4.** 삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + px + q = 0$의 한 근은 $3 + \sqrt{2}$이다. 유리수 $p$, $q$의 값을 구했을 때, $p + q$의 값은?

① 6　　② 10　　③ $-2$　　④ $-1$　　⑤ 1

해설

$x^3 - 7x^2 + px + q = 0$의 세 근은 $3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}, \alpha$

세 근의 합 : $\alpha + (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 7$

$\therefore\ \alpha = 1$

$p = (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})+\alpha(3-\sqrt{2})+\alpha(3+\sqrt{2}) = 7+6 \quad \therefore\ p = 13$

$-q = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) \cdot 1 = 7$

$\therefore\ q = -7$

$\therefore\ p + q = 13 - 7 = 6$

**5.** $x$, $y$에 관한 연립방정식 $\begin{cases} kx+y=-3 \\ 2x+(k-1)y=6 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때의 $k$의 값을 $\alpha$, 해가 없을 때의 $k$의 값을 $\beta$라 하면, $\alpha+\beta$의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

해설

해가 무수히 많을 조건은 $\frac{k}{2}=\frac{1}{k-1}=\frac{-3}{6}$

해가 없을 조건은 $\frac{k}{2}=\frac{1}{k-1}\neq\frac{-3}{6}$

$\frac{k}{2}=\frac{1}{k-1}$ 에서 $k(k-1)=2$,

$k^2-k-2=0$

$\therefore\ k=-1,\ 2$

(ⅰ) $k=-1$일 때,

$\frac{-1}{2}=\frac{1}{-1-1}=\frac{-3}{6}$ 이므로 해가 무수히 많다.

(ⅱ) $k=2$일 때,

$\frac{2}{2}=\frac{1}{2-1}\neq\frac{-3}{6}$ 이므로 해가 없다.

$\therefore\ \alpha=-1, \beta=2$

$\therefore\ \alpha+\beta=1$

**6.** $x, y$ 의 연립방정식 $ax+y=1, x+ay=1$ 의 근이 존재하기 위한 $a$ 의 조건은?

① $a \neq 2$ ② $a = \pm 1$ ③ $a \neq \pm 2$

④ $a \neq -1$ ⑤ $a \neq -2$

해설

$ax+y-1=0,\ x+ay-1=0$ 으로 변형하면,

ⅰ) $\frac{a}{1} \neq \frac{1}{a}$ 일 때, 오직 한 근을 가진다.

$a^2 \neq 1, \quad \therefore\ a \neq \pm 1$

ⅱ) $\frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{1}$ 일 때, 해가 무수히 많다.

$\therefore\ a = 1$

ⅰ), ⅱ) 에 의해서, $a \neq -1$ 일 때 해가 존재한다.

**7.** 연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=-5 \cdots\cdots ① \\ x^2+xy+y^2=7 \cdots\cdots ② \end{cases}$ 을 만족하는 $x, y$에 대해 $x+y$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$ 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ −1　　④ 2　　⑤ −2

해설

$x+y=u,\ xy=v$ 로 놓으면
①은 $u+v=-5 \cdots\cdots$ ③
②는 $u^2-v=7 \cdots\cdots$ ④
③, ④에서 $v$ 를 소거하면
$u^2+u-2=0$
$\therefore\ (u-1)(u+2)=0$
$u=1$ 일 때, $v=-6$ 이므로
$t^2-t-6=0$ 에서 $t=-2,\ 3$
$u=-2$ 일 때, $v=-3$ 이므로
$t^2+2t-3=0$ 에서 $t=1,\ -3$
따라서, 구하는 근은
$\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$
$\therefore\ M=1,\ \ m=-2\ \ \therefore\ M+m=-1$

**8.** 연립방정식 $x^2+y^2=5(xy-1)=10xy-5(x+y)$ 의 해를 꼭지점으로 하는 도형의 넓이를 구하면?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

해설

$(x+y)^2-2xy=5(xy-1)=10xy-5(x+y)$ 에서
$x+y=u,\ xy=v$ 라 놓으면

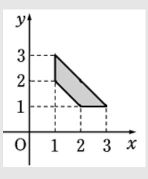
$\begin{cases} u^2-2v=5(v-1) \\ 5(v-1)=10v-5u \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} u^2=7v-5 \\ v=u-1 \end{cases}$ 을 풀면

$\therefore \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} u=4 \\ v=3 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠의 $x,\ y$ 는 $t^2-3t+2=0$ 의 근이므로
$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$
㉡의 $x,\ y$ 는 $t^2-4t+3=0$ 의 근이므로
$(x,\ y)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$




구하는 도형은 그림의 사각형이다.
$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

**9.** 이차방정식 $x^2 + (k+1)x + 2k + 1 = 0$ 의 두 근이 모두 정수일 때, 양수 $k$ 의 값을 구하면?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha \geq \beta)$ 라 하면 근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -(k+1) & \cdots\cdots ① \\ \alpha\beta = 2k + 1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①$\times 2 +$ ②을 하면 $\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) = -1$

$\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4 = 3, \quad (\alpha + 2)(\beta + 2) = 3$

$\alpha,\ \beta$ 가 정수이므로 $(\alpha + 2,\ \beta + 2) = (3,\ 1),\ (-1,\ -3)$

$\therefore\ (\alpha,\ \beta) = (1,\ -1),\ (-3,\ -5)$

①에서

$k = -(\alpha + \beta + 1)$ 이므로 $k = -1,\ 7$

$k > 0$ 이므로 $k = 7$

**10.** $x$ 에 대한 이차방정식 $x^2-(2a-1)x+a+1=0$의 두 근 $\alpha, \beta$가 모두 정수일 때, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$의 값을 구하면? (단, $a$는 자연수)

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $1$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

근이 정수이려면 판별식 $D=(2a-1)^2-4(a+1)=k^2$ ($k$는 정수) 이어야 한다. 이 식을 정리하면 $4a^2-8a-3=k^2$, $(2a-2)^2-7=k^2$, $(2a-2)^2-k^2=7$, $(2a-2+k)(2a-2-k)=7$ $a$, $k$는 정수이므로

(ⅰ) $2a-2+k=1,\ 2a-2-k=7$에서

$a=3,\ k=-3$

(ⅱ) $2a-2+k=7,\ 2a-2-k=1$에서

$a=3,\ k=3$

(ⅲ) $2a-2+k=-1,\ 2a-2-k=-7$ 에서 $a=-1,\ k=3$

(ⅳ) $2a-2+k=-7,\ 2a-2-k=-1$에서 $a=-1,\ k=-3$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$

$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2a-1}{a+1}=\frac{5}{4}$

**11.** $p$가 실수일 때, 두 이차방정식 $x^2+px+3=0$, $x^2+3x+p=0$이 오직 한 개의 공통근 $\alpha$를 갖는다고 한다. 이 때, $\alpha-p$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\alpha^2+p\alpha+3=0$

$\alpha^2+3\alpha+p=0$

$\alpha(p-3)-(p-3)=(\alpha-1)(p-3)=0$

$\alpha=1$ or $p=3$

$p=3$ 이면 두 다항식이 같아지므로 $\alpha=1$

$\therefore 1+p+3=0 \quad \therefore\ p=-4$

$\therefore\ \alpha-p=1-(-4)=5$

**12.** 두 이차방정식 $3x^2-(k+1)x+4k=0$, $3x^2+(2k-1)x+k=0$이 단 하나의 공통인 근 $\alpha$를 가질 때, $3k+\alpha$의 값은? (단, $k$는 실수인 상수)

① $-1$　　② $0$　　③ $1$　　④ $2$　　⑤ $3$

해설

공통근이 $\alpha$이므로

$3\alpha^2-(k+1)\alpha+4k=0$

$3\alpha^2+(2k-1)\alpha+k=0$

두 식을 변변끼리 빼면 $3k(\alpha-1)=0$

$k=0$ 또는 $\alpha=1$

$k=0$이면 두 식이 같아지므로

조건에 맞지 않는다.

$\therefore\ \alpha=1$을 대입하면

$3-(k+1)+4k=0,\quad k=-\frac{2}{3}$

$\therefore\ 3k+\alpha=-1$