

1. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + (k+1)x + k = 0$ 의 근이 모두 실근이 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 \leq k$ ② $1 \leq k < 2$ ③ $k > 0$

④ $-1 < k \leq \frac{1}{4}$ ⑤ $k \leq \frac{1}{4}$

해설

방정식 $x^3 + 2x^2 + (k+1)x + k = 0$ 을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$(x+1)(x^2 + x + k) = 0$$

이 때, 주어진 방정식의 모든 근이 실근이 되려면

방정식 $x^2 + x + k = 0$ 이 실근을 가져야 하므로

$$D = 1^2 - 4k \geq 0$$

$$\therefore k \leq \frac{1}{4}$$

2. 삼차방정식 $(x+2)(x^2+2x-a+2)=0$ 의 실근이 -2 뿐일 때, 실수 a 값의 범위를 구하면?

① $a < -3$

② $a < 1$

③ $a > -1$

④ $a > 2$

⑤ $a > 3$

해설

실근이 -2 뿐이므로 $x^2+2x-a+2=0$ 은 허근을 갖는다.

$$D = 2^2 - 4 \times 1 \times (-a + 2)$$

$$= 4a - 4 < 0$$

$$\therefore a < 1$$

3. 삼차방정식 $x^3 + px^2 + qx - 2 = 0$ 의 한 근이 $1+i$ 일 때, 실수 p, q 의 값에 대하여 $p+q$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x = 1+i$ 에서 $(x-1)^2 = i^2$, $x^2 - 2x + 2 = 0$
(또는, 다른 한 근이 $1-i$ 이므로 근과 계수의 관계에서 이차방정식 도출)
 $\therefore (x-1)(x^2 - 2x + 2) = 0$, $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$
 $\therefore p = -3, q = 4$
 $\therefore p + q = 1$

해설

[별해1] $x = 1+i$ 을 준식에 직접대입하고
허수부와 실수부로 정리하여 복소수의 상등을 이용한다.
[별해2] 세근의 곱이 2이므로 세 근은 $1+i, 1-i, 1$ 이다.
즉 근과 계수의 관계에서 p, q 의 값을 구한다.

4. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 3 = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}i$ 일 때, 두 실수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① -15 ② -10 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}i$ 이므로 켤레근은 $1 - \sqrt{2}i$
세 근이 α, β, γ 일때 $\alpha\beta\gamma = 3$ 이므로, $\alpha = 1 + \sqrt{2}i, \beta = 1 - \sqrt{2}i$
라 하면, $(1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) \cdot \gamma = 3$
 $3 \cdot \gamma = 3$
 $\gamma = 1$
 $\alpha + \beta + \gamma = -a = (1 + \sqrt{2}i) + (1 - \sqrt{2}i) + 1 = 3$
 $a = -3$
 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\beta = b = 3 + (1 - \sqrt{2}i) \cdot 1 + 1 \cdot (1 + \sqrt{2}i) = 5$
 $b = 5$
 $\therefore ab = (-3) \cdot 5 = -15$

5. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{3}i$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} &x^3 + ax^2 + bx + 4 = 0 \text{ 의 근 } 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, \alpha \\ &\text{세 근의 곱 : } \alpha(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) = -4 \\ &\alpha(1 + 3) = -4, \alpha = -1 \\ &\text{세 근 : } 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, -1 \\ &\text{세 근의 합 : } 1 + \sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i - 1 = -a \\ &a = -1 \\ &b = (1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) + (-1)(1 - \sqrt{3}i) \\ &\quad + (-1)(1 + \sqrt{3}i) \\ &= 1 + 3 - 1 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i = 2 \\ &\therefore a + b = -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

6. 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 - i$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

세 근을 $1 - i, 1 + i, \gamma$ 라 하면

$$(1 - i)(1 + i)\gamma = 4, 2\gamma = 4, \gamma = 2$$

$$a = -(1 - i + 1 + i + 2) = -4$$

$$b = (1 - i)(1 + i) + (1 + i)2 + 2(1 - i) = 6$$

$$\therefore a + b = 2$$

7. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x + y$ 의 값을 a, b 라 할 때, $a - b$ 의 값은? (단, x, y 는 양수, $a > b$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 7 && \dots \textcircled{1} \\ 4x^2 - 9xy + y^2 &= -14 && \dots \textcircled{2} \\ \textcircled{2} \text{ 식} + 2 \times \textcircled{1} \text{ 식에 대입하면} \\ 6x^2 - 11xy + 3y^2 &= 0 && (3x - y)(2x - 3y) = 0 \\ \therefore 3x &= y \text{ or } 2x = 3y \\ \textcircled{1}: 3x = y \text{를 } \textcircled{1} \text{식에 대입하면} \\ 7x^2 &= 7x = 1(x > 0), \quad y = 3 \\ \therefore x + y &= 4 \\ \textcircled{2}: 2x = 3y \text{를 } \textcircled{2} \text{식에 대입하면} \\ 7y^2 &= 28, \quad y^2 = 4, \quad y = 2(y > 0), \quad x = 3 \\ \therefore x + y &= 5 \\ a > b \text{이므로 } a &= 5, b = 4 \\ \therefore a - b &= 1 \end{aligned}$$

8. $x = \alpha, y = \beta$ 가 연립방정식

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 \end{cases} \text{의 해일 때, } \alpha^2 + \beta^2 \text{의 값은?}$$

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = -2 & \dots \textcircled{1} \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = -3 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 $\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \times 2$ 하면

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0, (x - 2y)(x - y) = 0,$$

$$x = 2y \text{ or } x = y$$

$x = 2y$ 를 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면

$$4y^2 - 2y^2 - 2y^2 = -2, 0 = -2 \text{ 불능}$$

$x = y$ 를 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면

$$y^2 - y^2 - 2y^2 = -2$$

$$y^2 = 1, y = \pm 1, x = \pm 1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 1 + 1 = 2$$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 1

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 & \dots \text{①} \\ y^2 - xy - 1 = 0 & \dots \text{②} \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 ① - ② × 2를 계산하여 정리하면

$$x^2 + xy - 2y^2 = 0, (x + 2y)(x - y) = 0$$

∴ $x = y, x = -2y$ 각각을 ① 식에 대입하면

i) $x = y$ 일 때 $x^2 - x^2 - 2 = 0, -2 = 0$ 불능

ii) $x = -2y$ 일 때 $4y^2 + 2y^2 - 2 = 0 \begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$

$x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$

10. 방정식 $xy + 4x - 2y - 11 = 0$ 을 만족하는 정수 x, y 에 대하여 xy 의 값이 아닌 것은?

- ① -15 ② -7 ③ -3 ④ 5 ⑤ 15

해설

$$xy + 4x - 2y - 11 = 0 \text{에서 } (x-2)(y+4) = 3$$

x, y 가 정수이므로

$$(x-2, y+4) = (1, 3), (-1, -3), (3, 1), (-3, -1)$$

$$\therefore (x, y) = (3, -1), (1, -7), (5, -3), (-1, -5)$$

$$\therefore xy = -3, -7, -15, 5$$

11. 연립방정식 $\begin{cases} ab + bc = 65 \\ ac + bc = 17 \end{cases}$ 을 만족시키는 양의 정수쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$ac + bc = 17$ 에서 $c(a + b) = 17$
그런데 a, b 는 양의 정수이므로 $a + b \geq 2$
 $\therefore c = 1, a + b = 17$
위의 식들을 $ab + bc = 65$ 에 대입하면
 $a^2 - 16a + 48 = 0$
 $\therefore a = 4$ 또는 $a = 12$
따라서, $a = 4$ 일 때 $b = 13, c = 1$
 $a = 12$ 일 때 $b = 5, c = 1$

12. 각 면에 1부터 12까지 자연수가 하나씩 적힌 정십이면체의 주사위가 있다. 이 주사위를 두 번 던져 나오는 눈의 수를 각각 x, y 라 할 때, $xy - 3x + 2y = 18$ 을 만족하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}xy - 3x + 2y &= 18, \quad x(y - 3) + 2y = 18, \\x(y - 3) + 2(y - 3) &= 12 \\(x + 2)(y - 3) &= 12 \\x + 2 &\geq 3 \text{ 이므로} \\(x + 2, y - 3) &= (3, 4), (4, 3), (6, 2), (12, 1) \\\therefore (x, y) &= (1, 7), (2, 6), (4, 5), (10, 4) \\\therefore &4 \text{ 개}\end{aligned}$$

13. p 가 실수일 때, 두 이차방정식 $x^2+px+3=0$, $x^2+3x+p=0$ 이 오직 한 개의 공통근 α 를 갖는다고 한다. 이 때, $\alpha-p$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\alpha^2 + p\alpha + 3 = 0$$

$$\alpha^2 + 3\alpha + p = 0$$

$$\alpha(p-3) - (p-3) = (\alpha-1)(p-3) = 0$$

$$\alpha = 1 \text{ or } p = 3$$

$$p = 3 \text{ 이면 두 다항식이 같아지므로 } \alpha = 1$$

$$\therefore 1 + p + 3 = 0 \quad \therefore p = -4$$

$$\therefore \alpha - p = 1 - (-4) = 5$$

14. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$ 이 한 개의 공통근 α 를 가지고, 공통이 아닌 두 근의 비가 $3 : 5$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ 0

해설

공통근이 α 이므로 $\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots \text{㉠}$
 $\alpha^2 + b\alpha + a = 0 \cdots \text{㉡}$
 $\text{㉠} - \text{㉡}$ 에서 $(a - b)(\alpha - 1) = 0$
 $a = b$ 이면 모순이므로 $a \neq b \therefore \alpha = 1$
 $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$ 의 공통이 아닌 근을 각각 β , γ
 라 하면 근과 계수와의 관계에 의하여 $1 \cdot \beta = b$, $1 \cdot \gamma = a$
 따라서, 공통이 아닌 두 근의 비는
 $\beta : \gamma = b : a = 3 : 5 \cdots \text{㉢}$
 한편, ㉠ 에 $\alpha = 1$ 을 대입하면 $a + b + 1 = 0 \cdots \text{㉣}$
 ㉢ , ㉣ 에서 $a = -\frac{5}{8}$, $b = -\frac{3}{8}$
 $\therefore a - b = -\frac{1}{4}$

15. 두 이차방정식 $3x^2 - (k+1)x + 4k = 0$, $3x^2 + (2k-1)x + k = 0$ 이 단 하나의 공통인 근 α 를 가질 때, $3k + \alpha$ 의 값은? (단, k 는 실수인 상수)

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근이 α 이므로
 $3\alpha^2 - (k+1)\alpha + 4k = 0$
 $3\alpha^2 + (2k-1)\alpha + k = 0$
두 식을 변변끼리 빼면 $3k(\alpha - 1) = 0$
 $k = 0$ 또는 $\alpha = 1$
 $k = 0$ 이면 두 식이 같아지므로
조건에 맞지 않는다.
 $\therefore \alpha = 1$ 을 대입하면
 $3 - (k+1) + 4k = 0, \quad k = -\frac{2}{3}$
 $\therefore 3k + \alpha = -1$