1. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

2. $x^4-5x^2-14=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 4 ② -4 ③ 8 ④ -8 ⑤ -16

해설

$x^4-5x^2-14=(x^2+2)(x^2-7)=0$이므로
두 허근 α, β는
각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로
$\alpha^2+\beta^2=-2-2=-4$

3. x에 대한 삼차방정식 $x^3+2x^2+(k+1)x+k=0$의 근이 모두 실근이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $-1 \le k$ ② $1 \le k < 2$ ③ $k > 0$

④ $-1 < k \le \frac{1}{4}$ ⑤ $k \le \frac{1}{4}$

해설

방정식 $x^3+2x^2+(k+1)+k=0$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$(x+1)(x^2+x+k)=0$

이 때, 주어진 방정식의 모든 근이 실근이 되려면

방정식 $x^2+x+k=0$이 실근을 가져야 하므로

$D=1^2-4k \ge 0$

$\therefore\ k \le \frac{1}{4}$

4. x에 대한 삼차방정식 $x^3 + (1-2a)x^2 + a(a-2)x + a^2 = 0$의 근이 오직 하나 뿐일 때, 실수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = x^3 + (1-2a)x^2 + a(a-2)x + a^2$ 으로 놓으면
$f(a) = a^3 + (1-2a) \cdot a^2 + a(a-2) \cdot a + a^2 = 0$
조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면
$(x-a)^2(x+1) = 0$
주어진 방정식의 근이 오직 하나뿐이므로 $x = -1$을 삼중근으로 갖는다.
$\therefore\ a = -1$

5. 방정식 $x^3-5x^2+2x+1=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\alpha+\beta+\gamma=5$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=-1$이므로
$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$
$=1+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)$
$=1+2-(-1)-5=-1$

6. 삼차방정식 $x^3+x^2+2x-3=0$ 의 세 근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$,$\alpha\beta\gamma$를 세 근으로 갖는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 일 때, $a-2b+c$의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$x^3+x^2+2x-3=0$ 의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 라 하면
$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=3$
구하려는 방정식의 세 근의 합
$-1+2+3=4 \quad \therefore a=-4$
$(-1)\times2+2\times3+(-1)\times3=-2+6-3=1 \quad \therefore b=1$
세 근의 곱 $(-1)\times2\times3=-6 \quad \therefore c=6$
$\therefore a-2b+c=-4-2+6=0$

7. x, y에 관한 연립방정식 $\begin{cases} kx+y=-3 \\ 2x+(k-1)y=6 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때의 k의 값을 α, 해가 없을 때의 k의 값을 β라 하면, $\alpha+\beta$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

해가 무수히 많을 조건은 $\frac{k}{2}=\frac{1}{k-1}=\frac{-3}{6}$

해가 없을 조건은 $\frac{k}{2}=\frac{1}{k-1}\neq\frac{-3}{6}$

$\frac{k}{2}=\frac{1}{k-1}$ 에서 $k(k-1)=2$,

$k^2-k-2=0$

$\therefore\ k=-1,\ 2$

(i) $k=-1$일 때,

$\frac{-1}{2}=\frac{1}{-1-1}=\frac{-3}{6}$ 이므로 해가 무수히 많다.

(ii) $k=2$일 때,

$\frac{2}{2}=\frac{1}{2-1}\neq\frac{-3}{6}$ 이므로 해가 없다.

$\therefore\ \alpha=-1, \beta=2$

$\therefore\ \alpha+\beta=1$

8. x, y 의 연립방정식 $ax + y = 1, x + ay = 1$ 의 근이 존재하기 위한 a 의 조건은?

① $a \neq 2$　② $a = \pm 1$　③ $a \neq \pm 2$

④ $a \neq -1$　⑤ $a \neq -2$

해설

$ax + y - 1 = 0,\ x + ay - 1 = 0$ 으로 변형하면,

ⅰ) $\frac{a}{1} \neq \frac{1}{a}$ 일 때, 오직 한 근을 가진다.

$a^2 \neq 1, \quad \therefore\ a \neq \pm 1$

ⅱ) $\frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{1}$ 일 때, 해가 무수히 많다.

$\therefore\ a = 1$

ⅰ), ⅱ) 에 의해서, $a \neq -1$ 일 때 해가 존재한다.

9. 연립방정식 $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ 의 근 x, y가 $xy = a$, $x+y = b$를 만족할 때, $a-b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\begin{cases} 2x-y-5=0 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=25 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠식을 정리해서

$y=2x-5$ 를 ㉡식에 대입한다.

$x^2+(2x-5)^2=25$,

$5x^2-20x=0$, $x(x-4)=0$

$\therefore\ x=0,\ 4$

ⅰ) $x=0$일 때, $y=-5$

$\therefore a=0,\ b=-5$

$\therefore a-b=5$

ⅱ) $x=4$일 때, $y=3$

$\therefore a=12,\ b=7$

$\therefore a-b=5$

10. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ 을 풀면?

① $x=18,\ y=-1$ 또는 $x=2,\ y=3$

② $x=-2,\ y=-3$ 또는 $x=2,\ y=3$

③ $x=\frac{18}{5},\ y=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=2,\ y=3$

④ $x=\frac{18}{5},\ y=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=-2,\ y=-3$

⑤ $x=-\frac{18}{5},\ y=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=-2,\ y=-3$

해설

$\begin{cases} 2x+y=7\cdots㉠ \\ x^2+Y^2=3\cdots㉡ \end{cases}$

$y=-2x+7$를 ㉡식에 대입

$x^2+(2x-7)^2=13$

$5x^2-28x+36=(5x-18)(x-2)=0$

$\begin{cases} x=\frac{18}{5},\ y=-\frac{1}{5} \\ x=2,\ y=3 \end{cases}$

11. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x+y$의 값을 a, b라 할 때, $a-b$의 값은? (단, x, y는 양수, $a > b$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \cdots$ ㉠
$4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \cdots$ ㉡
㉡ 식+2×㉠식에 대입하면
$6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0$ $(3x-y)(2x-3y) = 0$
$\therefore\ 3x = y\ \ or\ \ 2x = 3y$
㉮: $3x = y$를 ㉠식에 대입하면
$7x^2 = 7$ $x = 1(x > 0)$, $\quad y = 3$
$\therefore\ x + y = 4$
㉯: $2x = 3y$를 4×㉠식에 대입하면
$7y^2 = 28$, $\ y^2 = 4$, $y = 2(y > 0)$, $x = 3$
$\therefore\ x + y = 5$
$a > b$이므로 $a = 5, b = 4$
$\therefore\ a - b = 1$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2$의 값을 구하면?

① -1　　② 0　　③ $\frac{1}{3}$　　④ $\frac{5}{3}$　　⑤ 1

해설

$\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 & \cdots ① \\ y^2 - xy - 1 = 0 & \cdots ② \end{cases}$

상수항을 소거하기 위해 ① − ② × 2를 계산하여 정리하면

$x^2 + xy - 2y^2 = 0$, $(x + 2y)(x - y) = 0$

$\therefore\ x = y,\ x = -2y$ 각각을 ① 식에 대입하면

i) $x = y$일 때 $x^2 - x^2 - 2 = 0$, $-2 = 0$ 불능

ii) $x = -2y$일 때 $4y^2 + 2y^2 - 2 = 0$ $\begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$

$x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$

13. 방정식 $xy + 4x - 2y - 11 = 0$을 만족하는 정수 x, y에 대하여 xy의 값이 아닌 것은?

① -15 ② -7 ③ -3 ④ 5 ⑤ 15

해설

$xy + 4x - 2y - 11 = 0$에서 $(x-2)(y+4) = 3$
x, y가 정수이므로
$(x-2,\ y+4) = (1, 3), (-1, -3), (3, 1), (-3, -1)$
$\therefore\ (x,\ y) = (3, -1), (1, -7), (5, -3), (-1, -5)$
$\therefore\ xy = -3, -7, -15, 5$

14. 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{21}$ (단, $x<y$)을 만족하는 양의 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)에 대하여 $x+y$의 최댓값을 구하면?

① 484　② 192　③ 112　④ 100　⑤ 548

해설

$21(x+y)=xy,\quad xy-21(x+y)=0$

$\therefore\ (x-21)(y-21)=21^2=3^2\times 7^2$

$21x=(x-21)y$이고 $y>x>0$이므로

$y-21>x-21>0$

$\therefore (x-21,\ y-21)$

$=(1,\ 441), (3,\ 147), (7,\ 63), (9,\ 49)$

$\therefore (x,\ y)$

$=(22,\ 462), (24,\ 168), (28,\ 84), (30,\ 70)$

$\therefore\ x+y$의 최댓값은 $22+462=484$

15. p가 실수일 때, 두 이차방정식 $x^2+px+3=0$, $x^2+3x+p=0$이 오직 한 개의 공통근 α를 갖는다고 한다. 이 때, $\alpha-p$의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$\alpha^2+p\alpha+3=0$
$\alpha^2+3\alpha+p=0$
$\alpha(p-3)-(p-3)=(\alpha-1)(p-3)=0$
$\alpha=1$ or $p=3$
$p=3$ 이면 두 다항식이 같아지므로 $\alpha=1$
$\therefore 1+p+3=0 \quad \therefore\ p=-4$
$\therefore\ \alpha-p=1-(-4)=5$

16. 다음 x에 관한 두 개의 이차방정식 $\begin{cases} x^2-2x+a^2=0 \cdots ㉠ \\ x^2-ax+2a=0 \cdots ㉡ \end{cases}$

에서 공통근이 오직 한 개일 때, a의 값과 공통근 k를 구하면?(단, a는 실수)

① $a=0$일 때 $k=0$, $a=-1$일 때, $k=1$

② $a=2$일 때 $k=1\pm\sqrt{3}i$

③ $a=1$일 때 $k=1$, $a=2$일 때, $k=1$

④ $a=3$일 때 $k=2\pm\sqrt{3}$

⑤ $a=2$일 때 $k=-1$, $a=3$일 때, $k=1$

해설

공통근을 $x=k$라 하면

$k^2-2k+a^2=0 \ \cdots ①$

$k^2-ka+2a=0 \ \cdots ②$

두 식을 빼주면, $(k+a)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $k=-a$

ⅰ) $a=2$일 때

㉠, ㉡이 같아지므로 성립하지 않는다.

ⅱ) $k=-a$일 때

①에 넣으면 $a=0$또는 $a=-1$

$\begin{cases} a=0 \text{ 이면 } k=0 \\ a=-1 \text{ 이면 } k=1 \end{cases}$