1. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ 의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

2. $x^4-5x^2-14=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 4　② -4　③ 8　④ -8　⑤ -16

해설

$x^4-5x^2-14=(x^2+2)(x^2-7)=0$이므로
두 허근 α, β는
각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로
$\alpha^2+\beta^2=-2-2=-4$

3. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0$의 두 실근의 합을 구하면?

① -5 ② -6 ③ 0 ④ 5 ⑤ 6

해설

짝수차 상반방정식이므로
양변을 x^2으로 나누면

$$x^2 + 5x - 4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x}^{2} = 0,$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$라 놓으면

$t^2 + 5t - 6 = 0,\ (t + 6)(t - 1) = 0$

$\therefore\ t = 1,\ -6$

즉, $x + \frac{1}{x} = 1,\ x + \frac{1}{x} = -6$

$\therefore\ x^2 - x + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2 + 6x + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠식은 허근을 가지므로 조건에 맞지 않고
㉡식에서 두 실근의 합은
근과 계수와의 관계에서
$\therefore\ \alpha + \beta = -6$

4. $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$의 한 허근을 w라 할 때, $w^{2006}+\left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

짝수차 상반방정식이므로
양변을 x^2으로 나누면
$x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$
$\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}-3=0$
$x+\frac{1}{x}=z$로 놓으면
$z^2+2z-3=(z+3)(z-1)=0$
$\therefore\ z=-3$ 또는 $z=1$
(i) $z=-3$일 때,
$x+\frac{1}{x}=-3$에서 $x^2+3x+1=0$
$\therefore\ x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$: 실근
(ii) $z=1$일 때,
$x+\frac{1}{x}=1$에서
$x^2-x+1=0$
$x^2-x+1=0$의 해는 허수이므로
w는 $x^2-x+1=0$의 해이다.
$\therefore\ w^2-w+1=0,\ w^3=-1$
$\therefore\ w^{2006}+\left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$
$=w^2\cdot w^{2004}+\frac{1}{w^2\cdot w^{2004}}$
$=w^2+\left(\frac{1}{w}\right)^2=w^2-w=-1$

5. x에 대한 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + (k+1)x + k = 0$의 근이 모두 실근이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $-1 \le k$ ② $1 \le k < 2$ ③ $k > 0$

④ $-1 < k \le \frac{1}{4}$ ⑤ $k \le \frac{1}{4}$

해설

방정식 $x^3 + 2x^2 + (k+1) + k = 0$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$(x+1)(x^2+x+k) = 0$

이 때, 주어진 방정식의 모든 근이 실근이 되려면

방정식 $x^2 + x + k = 0$이 실근을 가져야 하므로

$D = 1^2 - 4k \ge 0$

$\therefore\ k \le \frac{1}{4}$

6. 삼차방정식 $x^3+px^2+qx-2=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 p, q의 값에 대하여 $p+q$의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$x=1+i$에서 $(x-1)^2=i^2$, $x^2-2x+2=0$
(또는, 다른 한 근이 $1-i$이므로 근과 계수의 관계에서 이차방정식 도출)
$\therefore (x-1)(x^2-2x+2)=0$, $x^3-3x^2+4x-2=0$
$\therefore$ $p=-3$, $q=4$
$\therefore$ $p+q=1$

해설

[별해1] $x=1+i$을 준식에 직접대입하고
허수부와 실수부로 정리하여 복소수의 상등을 이용한다.
[별해2] 세근의 곱이 2이므로 세 근은 $1+i$, $1-i$, 1이다.
즉 근과 계수의 관계에서 p, q의 값을 구한다.

7. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^6+\omega^2+\omega+1$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$(\omega^3)^2+(\omega^2+\omega+1)=1^2+0=1$

8. $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\dfrac{\omega^2}{\omega^{10}+1} + \dfrac{\omega^{10}+1}{\omega^2}$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,

$2\omega + 1 = -\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$

따라서 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이 ω 이다.

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 1 = 0$

$\therefore \omega^3 = 1$

$$(\text{준식}) = \frac{-(1+\omega)}{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1} + \frac{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1}{-(1+\omega)}$$

$$= \frac{-(\omega+1)}{(\omega+1)} + \frac{(\omega+1)}{-(\omega+1)} = -2$$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x + y$의 값을 a, b라 할 때, $a - b$의 값은? (단, x, y는 양수, $a > b$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \cdots$ ㉠
$4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \cdots$ ㉡
㉡ 식+2×㉠식에 대입하면
$6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0$ $(3x - y)(2x - 3y) = 0$
$\therefore\ 3x = y \ \ or \ \ 2x = 3y$
㉮: $3x = y$를 ㉠식에 대입하면
$7x^2 = 7$ $x = 1(x > 0), \quad y = 3$
$\therefore\ x + y = 4$
㉯: $2x = 3y$를 4×㉠식에 대입하면
$7y^2 = 28, \quad y^2 = 4, y = 2(y > 0), x = 3$
$\therefore\ x + y = 5$
$a > b$이므로 $a = 5, b = 4$
$\therefore\ a - b = 1$

10. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2$ 의 값을 구하면?

① -1　　② 0　　③ $\frac{1}{3}$　　④ $\frac{5}{3}$　　⑤ 1

해설

$\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 & \cdots ① \\ y^2 - xy - 1 = 0 & \cdots ② \end{cases}$

상수항을 소거하기 위해 ① − ② × 2를 계산하여 정리하면

$x^2 + xy - 2y^2 = 0,\ (x + 2y)(x - y) = 0$

$\therefore\ x = y,\ x = -2y$ 각각을 ① 식에 대입하면

i) $x = y$일 때 $x^2 - x^2 - 2 = 0,\ -2 = 0$ 불능

ii) $x = -2y$일 때 $4y^2 + 2y^2 - 2 = 0$ $\begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$

$x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$

11. 방정식 $xy+4x-2y-11=0$을 만족하는 정수 x, y에 대하여 xy의 값이 아닌 것은?

① -15　② -7　③ -3　④ 5　⑤ 15

해설

$xy+4x-2y-11=0$에서 $(x-2)(y+4)=3$

x, y가 정수이므로

$(x-2,\ y+4)=(1,3),(-1,-3),(3,1),(-3,-1)$

$\therefore\ (x,\ y)=(3,-1),(1,-7),(5,-3),(-1,-5)$

$\therefore\ xy=-3,-7,-15,5$

12. 서로 다른 세 정수 a, b, c에 대하여 삼차방정식 $(x-a)(x-b)(x-c) = 2$가 정수근을 가질 때, 이 근은?

① $\dfrac{a+b+c}{3}$ ② $\dfrac{a+b+c-1}{3}$ ③ $\dfrac{a+b+c-2}{3}$
④ $\dfrac{a+b+c-3}{3}$ ⑤ $\dfrac{a+b+c-4}{3}$

해설

$a < b < c$ 라 가정했을때, 정수근을 α라고 하면, $(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c) = 2$를 만족하는 순서쌍은 $(1, -1, -2)$ 밖에 없다.

$\Rightarrow \alpha - a = 1$

$\alpha - b = -1$

$\alpha - c = -2$

세 식을 다 더하면,

$3\alpha = a+b+c-2$, $\alpha = \dfrac{a+b+c-2}{3}$

13. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ ㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 2$ ㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉣, ㉤ ⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$x^3 - 1 = 0,$

$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$

$\omega^2 = -1 - \omega \cdots$ ㉠, ㉡

$\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots$ ㉢

$\omega^{1005} + \omega^{1004}$

$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$

$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots$ ㉣

$\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots$ ㉤

14. 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근을 ω라 할 때, $\dfrac{2w^2+3\overline{w}}{w^{100}+1}$의 값을 구하면? (단, $\overline{w}$는 w의 켤레복소수이다.)

① 2　② 3　③ 5　④ -3　⑤ -5

해설

$x^2+x+1=0$의 두 근은

$\omega, \overline{\omega} \Rightarrow \omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\omega^2+\omega+1=0,$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0,\ \omega^3-1=0,\ \omega^3=1$

$\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0,$

$(\overline{\omega}-1)(\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1)=0,$

$\overline{\omega}^3-1=0,\ \overline{\omega}^3=1$

$\dfrac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{\omega^{100}+1}=\dfrac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{(\omega^3)^{33}\omega+1}$

$=\dfrac{2\omega^2}{-\omega^2}+\dfrac{3\overline{\omega}}{-\omega^2}$

$=-2+\dfrac{3\omega\overline{\omega}}{-\omega^3}$

$=-2-\dfrac{3}{1}=-5$

15. 연립방정식 $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$ 의 해에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

Ⅰ. 이 방정식은 a의 값에 관계없이 항상 해를 갖는다.
Ⅱ. $a=-2$ 이면 이 방정식은 무수히 많은 해를 갖는다.
Ⅲ. 이 방정식이 무수히 많은 해를 가지는 a는 꼭 한 개 있다.
Ⅳ. 이 방정식이 유일한 해를 가지면, 그 해의 x, y, z 의 값은 모두 같다.

① Ⅱ　　② Ⅱ, Ⅲ　　③ Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ　　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

세 방정식을 더하면 $(a+2)(x+y+z)=3$
ⅰ) $a=-2$ 이면 이 방정식의 해는 없다.
따라서 Ⅰ, Ⅱ 는 옳지 않다.
ⅱ) $a \neq -2$ 이면 $x+y+z=\dfrac{3}{a+2}$ ······ ㉠
㉠에서 첫 번째 식을 빼면 $(a-1)x=\dfrac{a-1}{a+2}$
따라서 $a=1$ 이면 이 방정식은 무수히 많은 해를 가지고,
$a \neq 1$ 이면 $x=\dfrac{1}{a+2}$
같은 방법으로 $y=\dfrac{1}{a+2}$, $z=\dfrac{1}{a+2}$
따라서 Ⅲ, Ⅳ 는 옳다.

16. 어느 4개의 정수 중에서 3개씩의 합이 각각 180, 197, 208, 222 일 때, 4개의 정수 중에서 가장 큰 수는?

① 77　　② 83　　③ 89

④ 95　　⑤ 알 수 없다.

해설

네 정수를 $w \le x \le y \le z$라 하자.
$3(w+x+y+z) = 180+197+208+222 = 807$
$w+x+y+z = 269$, $w+x+y = 180$ 이므로
$z = 269 - 180 = 89$
따라서 가장 큰 정수는 89이다.