

1. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ 의 네 근 중 가장 작은 근을 a , 가장 큰 근을 b 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$$

$$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{5}, x = \pm\sqrt{6}$$

$$\text{가장 작은 근 } a = -\sqrt{6}, \text{ 가장 큰 근 } b = \sqrt{6}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$$

2. $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① 4

② -4

③ 8

④ -8

⑤ -16

해설

$x^4 - 5x^2 - 14 = (x^2 + 2)(x^2 - 7) = 0$ 이므로

두 허근 α, β 는

각각 $\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = -2 - 2 = -4$$

3. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0$ 의 두 실근의 합을 구하면?

① -5

② -6

③ 0

④ 5

⑤ 6

해설

짝수차 상반방정식이므로

양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + 5x - 4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{라 놓으면}$$

$$t^2 + 5t - 6 = 0, (t + 6)(t - 1) = 0$$

$$\therefore t = 1, -6$$

$$\text{즉, } x + \frac{1}{x} = 1, x + \frac{1}{x} = -6$$

$$\therefore x^2 - x + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + 6x + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠식은 허근을 가지므로 조건에 맞지 않고

㉡식에서 두 실근의 합은

근과 계수와의 관계에서

$$\therefore \alpha + \beta = -6$$

4. $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $w^{2006} + \left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$ 의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

짝수차 상반방정식이므로

양변을 x^2 으로 나누면

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) \right\} - 3 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = z$ 로 놓으면

$$z^2 + 2z - 3 = (z + 3)(z - 1) = 0$$

$$\therefore z = -3 \text{ 또는 } z = 1$$

(i) $z = -3$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} = -3 \text{에서 } x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} : \text{실근}$$

(ii) $z = 1$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{에서}$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 해는 허수이므로

w 는 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 해이다.

$$\therefore w^2 - w + 1 = 0, w^3 = -1$$

$$\therefore w^{2006} + \left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$$

$$= w^2 \cdot w^{2004} + \frac{1}{w^2 \cdot w^{2004}}$$

$$= w^2 + \left(\frac{1}{w}\right)^2 = w^2 - w = -1$$

5. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + (k+1)x + k = 0$ 의 근이 모두 실근이 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 \leq k$

② $1 \leq k < 2$

③ $k > 0$

④ $-1 < k \leq \frac{1}{4}$

⑤ $k \leq \frac{1}{4}$

해설

방정식 $x^3 + 2x^2 + (k+1)x + k = 0$ 을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$(x+1)(x^2 + x + k) = 0$$

이 때, 주어진 방정식의 모든 근이 실근이 되려면

방정식 $x^2 + x + k = 0$ 이 실근을 가져야 하므로

$$D = 1^2 - 4k \geq 0$$

$$\therefore k \leq \frac{1}{4}$$

6. 삼차방정식 $x^3 + px^2 + qx - 2 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 p, q 의 값에 대하여 $p + q$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x = 1 + i \text{에서 } (x - 1)^2 = i^2, \quad x^2 - 2x + 2 = 0$$

(또는, 다른 한 근이 $1 - i$ 이므로 근과 계수의 관계에서 이차방정식 도출)

$$\therefore (x - 1)(x^2 - 2x + 2) = 0, \quad x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$$

$$\therefore p = -3, \quad q = 4$$

$$\therefore p + q = 1$$

해설

[별해1] $x = 1 + i$ 을 준식에 직접대입하고

허수부와 실수부로 정리하여 복소수의 상등을 이용한다.

[별해2] 세근의 곱이 2이므로 세 근은 $1 + i, 1 - i, 1$ 이다.

즉 근과 계수의 관계에서 p, q 의 값을 구한다.

7. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^6 + \omega^2 + \omega + 1$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$(\omega^3)^2 + (\omega^2 + \omega + 1) = 1^2 + 0 = 1$$

8. $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\frac{\omega^2}{\omega^{10} + 1} + \frac{\omega^{10} + 1}{\omega^2}$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2},$$

$$2\omega + 1 = -\sqrt{3}i$$

양변을 제곱해서 정리하면

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

따라서 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이 ω 이다.

$$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 1 = 0$$

$$\therefore \omega^3 = 1$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \frac{-(1+\omega)}{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1} + \frac{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1}{-(1+\omega)} \\ &= \frac{-(\omega+1)}{(\omega+1)} + \frac{(\omega+1)}{-(\omega+1)} = -2 \end{aligned}$$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x + y$ 의 값을 a, b 라 할 때, $a - b$ 의 값은? (단, x, y 는 양수, $a > b$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉡ 식 $+ 2 \times$ ㉠ 식에 대입하면

$$6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0 \quad (3x - y)(2x - 3y) = 0$$

$$\therefore 3x = y \text{ or } 2x = 3y$$

㉠: $3x = y$ 를 ㉠ 식에 대입하면

$$7x^2 = 7 \quad x = 1 (x > 0), \quad y = 3$$

$$\therefore x + y = 4$$

㉡: $2x = 3y$ 를 $4 \times$ ㉠ 식에 대입하면

$$7y^2 = 28, \quad y^2 = 4, \quad y = 2 (y > 0), \quad x = 3$$

$$\therefore x + y = 5$$

$$a > b \text{ 이므로 } a = 5, b = 4$$

$$\therefore a - b = 1$$

10. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha$, $y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2$ 의 값을 구하면?

① -1

② 0

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{5}{3}$

⑤ 1

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ y^2 - xy - 1 = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 $\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2$ 를 계산하여 정리하면

$$x^2 + xy - 2y^2 = 0, (x + 2y)(x - y) = 0$$

$\therefore x = y$, $x = -2y$ 각각을 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면

i) $x = y$ 일 때 $x^2 - x^2 - 2 = 0$, $-2 = 0$ 불능

$$\text{ii) } x = -2y \text{ 일 때 } 4y^2 + 2y^2 - 2 = 0 \quad \begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$x = \alpha, y = \beta \text{라 할 때, } \alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

11. 방정식 $xy + 4x - 2y - 11 = 0$ 을 만족하는 정수 x, y 에 대하여 xy 의 값이 아닌 것은?

① -15

② -7

③ -3

④ 5

⑤ 15

해설

$xy + 4x - 2y - 11 = 0$ 에서 $(x - 2)(y + 4) = 3$

x, y 가 정수이므로

$(x - 2, y + 4) = (1, 3), (-1, -3), (3, 1), (-3, -1)$

$\therefore (x, y) = (3, -1), (1, -7), (5, -3), (-1, -5)$

$\therefore xy = -3, -7, -15, 5$

12. 서로 다른 세 정수 a, b, c 에 대하여 삼차방정식 $(x-a)(x-b)(x-c) = 2$ 가 정수근을 가질 때, 이 근은?

① $\frac{a+b+c}{3}$

② $\frac{a+b+c-1}{3}$

③ $\frac{a+b+c-2}{3}$

④ $\frac{a+b+c-3}{3}$

⑤ $\frac{a+b+c-4}{3}$

해설

$a < b < c$ 라 가정했을때, 정수근을 α 라고 하면, $(\alpha - a)(\alpha - b)(\alpha - c) = 2$ 를 만족하는 순서쌍은 $(1, -1, -2)$ 밖에 없다.

$$\Rightarrow \alpha - a = 1$$

$$\alpha - b = -1$$

$$\alpha - c = -2$$

세 식을 다 더하면,

$$3\alpha = a + b + c - 2, \alpha = \frac{a + b + c - 2}{3}$$

13. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 2$

㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢

② ㉡

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$$x^3 - 1 = 0,$$

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$\omega^2 = -1 - \omega \cdots \text{㉠, ㉡}$$

$$\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots \text{㉢}$$

$$\omega^{1005} + \omega^{1004}$$

$$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$$

$$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots \text{㉣}$$

$$\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots \text{㉤}$$

14. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 ω 라 할 때, $\frac{2\omega^2 + 3\bar{\omega}}{\omega^{100} + 1}$ 의 값을 구하면?
(단, $\bar{w}$ 는 w 의 켈레복소수이다.)

① 2

② 3

③ 5

④ -3

⑤ -5

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근은

$$\omega, \bar{\omega} \Rightarrow \omega + \bar{\omega} = -1, \omega\bar{\omega} = 1$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0, \omega^3 - 1 = 0, \omega^3 = 1$$

$$\bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1 = 0,$$

$$(\bar{\omega} - 1)(\bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1) = 0,$$

$$\bar{\omega}^3 - 1 = 0, \bar{\omega}^3 = 1$$

$$\frac{2\omega^2 + 3\bar{\omega}}{\omega^{100} + 1} = \frac{2\omega^2 + 3\bar{\omega}}{(\omega^3)^{33}\omega + 1}$$

$$= \frac{2\omega^2}{-\omega^2} + \frac{3\bar{\omega}}{-\omega^2}$$

$$= -2 + \frac{3\omega\bar{\omega}}{-\omega^3}$$

$$= -2 - \frac{3}{1} = -5$$

15. 연립방정식
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$
 의 해에 대한 다음 보기의 설명 중

옳은 것을 모두 고르면?

보기

- I. 이 방정식은 a 의 값에 관계없이 항상 해를 갖는다.
 II. $a = -2$ 이면 이 방정식은 무수히 많은 해를 갖는다.
 III. 이 방정식이 무수히 많은 해를 가지는 a 는 꼭 한 개 있다.
 IV. 이 방정식이 유일한 해를 가지면, 그 해의 x, y, z 의 값은 모두 같다.

① II

② II, III

③ III, IV

④ I, III, IV

⑤ I, II, III, IV

해설

세 방정식을 더하면 $(a+2)(x+y+z) = 3$

i) $a = -2$ 이면 이 방정식의 해는 없다.

따라서 I, II 는 옳지 않다.

ii) $a \neq -2$ 이면 $x+y+z = \frac{3}{a+2} \dots\dots ㉠$

㉠에서 첫 번째 식을 빼면 $(a-1)x = \frac{a-1}{a+2}$

따라서 $a = 1$ 이면 이 방정식은 무수히 많은 해를 가지고,

$a \neq 1$ 이면 $x = \frac{1}{a+2}$

같은 방법으로 $y = \frac{1}{a+2}, z = \frac{1}{a+2}$

따라서 III, IV 는 옳다.

16. 어느 4개의 정수 중에서 3개씩의 합이 각각 180, 197, 208, 222 일 때, 4개의 정수 중에서 가장 큰 수는?

① 77

② 83

③ 89

④ 95

⑤ 알 수 없다.

해설

네 정수를 $w \leq x \leq y \leq z$ 라 하자.

$$3(w + x + y + z) = 180 + 197 + 208 + 222 = 807$$

$$w + x + y + z = 269, w + x + y = 180 \text{ 이므로}$$

$$z = 269 - 180 = 89$$

따라서 가장 큰 정수는 89이다.