

1. 다음 보기의 복소수 중 실수인 것의 개수는?

보기

$2i,$ $1 + \sqrt{-4},$ $3 + 4i,$ $9,$ $i^2 + 1$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$a + bi$ 에서 $b = 0$ 인 경우, 즉 허수 부분이 0이면 실수이다.
 $2i$ 의 허수 부분은 2, $1 + \sqrt{-4} = 1 + 2i$ 에서 허수 부분은 2이고,
 $3 + 4i$ 의 허수 부분은 4이다.
 9 와 $i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ 의 허수 부분은 0이다.
따라서 실수인 것은 9와 $i^2 + 1$ 로 두 개다.

2. 복소수 $\frac{3+i}{1+i} + \frac{a-i}{1-i}$ 가 실수가 되도록 하는 실수 a 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\frac{3+i}{1+i} + \frac{a-i}{1-i} &= \frac{(3+i)(1-i) + (1+i)(a-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{4-2i + (a+1) + (a-1)i}{2} \\ &= \frac{a+5 + (a-3)i}{2}\end{aligned}$$

위의 식이 실수가 되려면 허수 부분이 0이어야 하므로 $a-3=0$
 $\therefore a=3$

3. 복소수 $(1 - xi)(1 - i)$ 가 순허수가 되도록 실수 x 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

$(1 - xi)(1 - i) = (1 - x) + (-1 - x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1 - x = 0,$
 $x = 1$

4. α, β 를 복소수라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $\alpha + \beta i = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$
- ② $\alpha + \beta i = r + \delta i$ 이면 $\alpha = r, \beta = \delta$
- ③ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$
- ④ $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$
- ⑤ $\alpha^2 < 0$

해설

- ① $\alpha = 1, \beta = i$ 이면 $\alpha + \beta i = 1 + i^2 = 0$ 이지만 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 이다.
 - ② $\alpha = 1, \beta = 1$ 이면 $\alpha + \beta i = 1 + i$ 이고, $r = 2, \delta = -1 + i$ 이면 $r + \delta i = 1 + i$ 에서 $\alpha + \beta i = r + \delta i$ 이지만 $\alpha \neq r, \beta \neq \delta$ 이다.
 - ③ $\alpha = 1, \beta = i$ 이면 $\alpha^2 + \beta^2 = 1 + i^2 = 0$ 이지만 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 이다.
 - ④ $\alpha \neq 0$ 이고 $\beta \neq 0$ 이라 가정하고 $\alpha\beta = 0$ 의 양변에 $\frac{1}{\alpha}$ 을 곱하면 $\beta = 0$ 이 되어 모순이다. 따라서 $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$ 이다.
 - ⑤ (순허수)² < 0 이나 $\alpha = 1 + i$ 이면 $\alpha^2 = (1 + i)^2 = 2i$ 가 되어 양수도 음수도 아니다.
- 따라서 옳은 것은 ④이다.

5. $x = 1 + 2i$, $y = \frac{1+2i}{1-i}$, $z = \frac{1-2i}{1-i}$ 일 때, $xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1 + 3i$

② $-1 - 2i$

③ $-1 + 2i$

④ $-1 - i$

⑤ $-1 + i$

해설

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2i, y = \frac{1+2i}{1-i}, z = \frac{1-2i}{1-i} \\ \therefore xy + xz &= \frac{(1+2i)^2}{-3+4i+5} + \frac{(1-2i)(1+2i)}{1-i} \\ &= \frac{1-i}{1-i} \\ &= 1 \end{aligned}$$

6. 자연수 n 에 대하여 $1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$ 의 값을 모두 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $1-i$

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{1}{i} = -i, \left(\frac{1}{i}\right)^3 = i$$

i) $n = 2k$ 일 때,

$$1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$$

$$= 1 - i + i - i + \cdots + i = 1$$

ii) $n = 2k-1$ 일 때

$$1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$$

$$= 1 - i + i - i + \cdots - i$$

$$= 1 - i$$

7. $x = 1 + \sqrt{2}i, y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$x + y = 2, \quad xy = 3$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$$

8. $\alpha = 1 + i, \beta = 2 - i$ 의 켈레복소수를 각각 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 라 할 때, $\alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta}$ 의 값은?

- ① 0 ② 3 ③ $7 - 2i$ ④ $7 - i$ ⑤ $7 + i$

해설

$$\begin{aligned} &\alpha = 1 + i, \beta = 2 - i \text{ 에서 } \bar{\alpha} = 1 - i, \bar{\beta} = 2 + i \text{ 이므로} \\ &\alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta} \\ &= (1 + i)(1 - i) + (1 + i)(2 + i) + (1 - i)(2 - i) + (1 - i)(2 + i) \\ &= (1 + 1) + (2 - 1 + 3i) + (2 - 1 - 3i) + (2 + 1 - i) \\ &= 7 - i \end{aligned}$$

9. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $a \geq 0, b < 0$ ② $a > 0, b > 0$ ③ $a \geq 0, b > 0$
④ $a < 0, b < 0$ ⑤ $a \leq 0, b < 0$

해설

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 가 성립할 조건은 $b < 0$ 이고 $a \geq 0$ 일 때이다.

10. 방정식 $(a^2 - 3)x - 1 = a(2x + 1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$(a^2 - 2a - 3)x = a + 1$$

$$(a - 3)(a + 1)x = a + 1$$

$\therefore a = 3$ 이면 해가 없다.