1. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$㉠
$(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하면,
$m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{13}{3}$
$\therefore\ m-n=5$

2. $x^3-6x^2+11x-6$을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$　　② $(x-1)(x+2)(x+3)$
③ $(x-1)(x-2)(x-3)$　　④ $(x+1)(x+2)(x-3)$
⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면
$f(1)=0,\ f(2)=0,\ f(3)=0$이므로
(준식)$=(x-1)(x-2)(x-3)$

3. $(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$,
$(x+3y)+(-3x+2y)i=1+8i$ 에서
복소수의 상등에 의하여
$x+3y=1,\ -3x+2y=8$ 이고
연립하여 풀면 $y=1,\ x=-2$
$\therefore\ x+y=-1$

4. 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$\frac{D}{4} = (k-a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$

$\therefore\ -2ka - b + 2 = 0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a = 0,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 2$

5. 방정식 $x^4 - 4x + 3 = 0$의 해를 구하면?

① $x = 1, x = -1 \pm 2i$
② $x = -1, x = 1 \pm 2i$
③ $x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}i$
④ $x = -1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$
⑤ $x = 1$

해설

1	1	0	0	−4	3
		1	1	1	−3
1	1	1	1	−3	0
		1	2	3	
	1	2	3	0	

$(x-1)^2(x^2+2x+3) = 0,\ x = 1, -1 \pm \sqrt{2}i$

6. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$ ② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$
③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$ ④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$
⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

7. 모든 실수 x, y에 대하여 $\sqrt{mx^2-mx+2}$가 0이 아닌 실수가 될 실수 m의 값의 범위는?

① $0<m<4$　　② $4 \le m \le 8$　　③ $0 \le m < 8$
④ $4 < m \le 8$　　⑤ $m \ge 8$

해설

$\sqrt{mx^2-mx+2}$가 0이 아닌 실수가 되려면 $mx^2-mx+2>0$ 이어야 한다.
ⅰ) $m=0$일 때 $0 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 2 > 0$이므로
모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.
ⅱ) $m \ne 0$일 때 $mx^2-mx+2>0$가
모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면
$m>0 \cdots$ ㉠
또 이차방정식 $mx^2-mx+2=0$의 판별식을
D라 할 때
$D=(-m)^2-8m<0$, $m(m-8)<0$
$\therefore 0<m<8 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<m<8$
ⅰ), ⅱ)에서 $0 \le m < 8$

8. 다음 부등식을 동시에 만족하는 정수 x의 개수는?

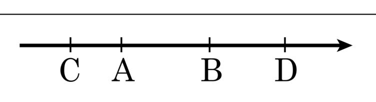
$$x^2 < 3x + 40 \ , \ 3x^2 - 7x \geq 40$$

① 4개　② 5개　③ 6개　④ 7개　⑤ 8개

해설

$x^2 < 3x + 40$,　$x^2 - 3x - 40 < 0$,
$(x-8)(x+5) < 0$,　$-5 < x < 8$
$3x^2 - 7x \geq 40$,　$3x^2 - 7x - 40 \geq 0$
$(3x+8)(x-5) \geq 0$,
$x \geq 5$ 또는 $x \leq -\frac{8}{3} \rightarrow$
공통범위는 $-5 < x \leq -\frac{8}{3}$,　$5 \leq x < 8$
정수는 -4, -3, 5, 6, 7 : 5개이다.

9. 다음 빈칸에 알맞은 부등호를 써 넣어라.



m , n 이 양수라고 할 때, 선분 AB 를 m : n 으로 외분하는 점은

i) m (   ) n 일 때 반직선 $\overrightarrow{BD}$ 위에 있고,

ii) m (   ) n 일 때 반직선 $\overrightarrow{AC}$ 위에 있다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $>$

▷ 정답 : $<$

해설

외분점을 P 라고 하면

$\overline{AP}$: $\overline{PB}$ $=$ m : n 이므로

$m > n$ 일 때 반직선 $\overrightarrow{BD}$ 위에 있고,

$m < n$ 일 때 반직선 $\overrightarrow{AC}$ 위에 있다.

10. 두 직선 $3x-2y-4=0$, $x+2y-4=0$ 의 교점과 점 $(1,-4)$ 를 지나는 직선의 방정식은?

① $5x-y-9=0$　　② $5x+y-9=0$
③ $x-2y-1=0$　　④ $2x-3y-1=0$
⑤ $2x-y+3=0$

해설

$$\begin{cases} 3x-2y-4=0 \ \cdots \ ㉠ \\ x+2y-4=0 \ \cdots \ ㉡ \end{cases}$$

㉠ + ㉡ : $x=2,\ y=1$
$\therefore$ 교점 : $(2,\ 1)$
$\therefore$ 구하는 직선은 $y-1=\dfrac{-4-1}{1-2}(x-2)=5(x-2)$
$\therefore\ 5x-y-9=0$

11. 포물선 $y = x^2 - x + 1$ 위의 점 중에서 직선 $y = x - 3$ 에의 거리가 최소인 점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $y = x - 3$ 에 평행인 직선 $y = x + k$ 와
포물선 $y = x^2 - x + 1$ 과의 접점이 구하는 점이다.
$x^2 - x + 1 = x + k$ 에서 $\dfrac{D}{4} = 1 - (1 - k) = 0$
$\therefore\ k = 0$
이때, $x = 1,\ y = 1$ 이므로
구하는 점은 $(1,\ 1)$
$\therefore\ a = 1,\ b = 1$
$\therefore\ a + b = 2$

12. 원 $x^2+y^2+4x-10y+28=0$의 중심과 점 $(4,\ -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이라고 할 때, $a+b+r^2$의 값은?

① 13　② 15　③ 17　④ 19　⑤ 21

해설

$x^2+y^2+4x-10y+28=0$

$\Rightarrow\ (x+2)^2+(y-5)^2=1$

$\therefore$ 구하는 원은 $(-2,\ 5)$와 $(4,\ -1)$을 지름의 양 끝으로 하는 원이다.

이 원은 중심이 $\left(\dfrac{-2+4}{2},\ \dfrac{5-1}{2}\right)=(1,\ 2)$

반지름이 $\dfrac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2+(-1-5)^2}=3\sqrt{2}$

이므로 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=(3\sqrt{2})^2=18$

$\therefore\ a=1,\ b=2,\ r^2=18$

$\therefore\ a+b+r^2=21$

13. 점$(2,\ 1)$ 을 중심으로 하고, 직선 $x+y-5=0$ 에 접하는 원의 반지름은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름 r 은 점 $(2,\ 1)$ 에서
직선 $x+y-5=0$ 까지의 거리이므로
$r=\dfrac{|2+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

14. 점 $(2, 4)$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 다음 직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭이동 점의 좌표를 구하면?

① $(1,\ 3)$ ② $(2,\ 4)$ ③ $(3,\ 5)$
④ $(4,\ 6)$ ⑤ $(5,\ 7)$

해설

점 $(2,\ 4)$ 를 다시 x 축의 방향으로
2 만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(2 + 2, 4)$, 즉 $(4,\ 4)$
점 $(4, 4)$ 를 다시 직선 $x = 3$ 에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는
$(2 \cdot 3 - 4, 4)$, 즉 $(2, 4)$

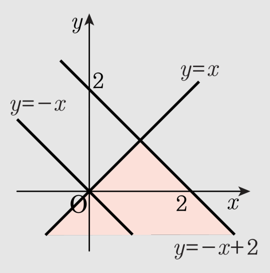
15. 좌표평면에서 연립부등식 $y < x$, $x+y < 2$, $y > ax$ 의 영역이 삼각형의 내부를 나타내도록 실수 a 의 값의 범위를 정하면?

① $-3 < a < -1$　　② $-2 < a < 0$　　③ $-1 < a < 1$

④ $0 < a < 2$　　⑤ $1 < a < 3$

해설

연립부등식 $y < x$, $x+y < 2$ 의 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



$y > ax$ 의 영역은 직선 $y = ax$ 의 위쪽 부분이므로 세 영역으로 둘러싸인 부분이 삼각형의 내부가 되려면 a 의 범위는 $-1 < a < 1$ 이 된다.

16. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+2 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지가 $x+3$ 이 되도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-6$

해설

검산식을 사용

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)\cdot A+(x+3)$

$A=(x+p)$

$x^3+ax^2+bx+2-(x+3)=(x^2-x+1)(x+p)$

$x^3+ax^2+(b-1)x-1=(x^2-x+1)(x-1)\quad \therefore p=-1$

우변을 정리하면

$\therefore\ a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

17. 복소수 $z = (1+i)x + 1 - 2i$ 에 대하여 z^2 이 음의 실수일 때, 실수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

해설

$z \;=\; (1+i)x + 1 - 2i \;=\; (x+1) + (x-2)i$

z^2 의 음의실수 $\Leftrightarrow$ z 가 순허수

$\therefore\; x + 1 = 0,\quad x = -1$

18. 두 실수 a, b 에 대하여 복소수 $z = a + bi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$ 의 곱 $z \cdot \bar{z} = 9$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{9}{z}\right)$를 간단히 하면?

① b ② $2b$ ③ 0 ④ $5a$ ⑤ a

해설

$z \cdot \bar{z} = 9$ 이므로 $\bar{z} = \frac{9}{z}$

$\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{9}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$ 이므로

$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$

19. $x = 1 + \sqrt{2}i$, $y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^3 - y^3$ 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{2}i$ ② $-2\sqrt{2}i$ ③ $\sqrt{2}i$
④ $-\sqrt{2}i$ ⑤ $2i$

해설

$x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$
$x - y = 2\sqrt{2}i$, $xy = (1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i) = 3$
$x^3 - y^3 = (2\sqrt{2}i)^3 + 3 \cdot 3 \cdot (2\sqrt{2}i)$
$= -16\sqrt{2}i + 18\sqrt{2}i$
$= 2\sqrt{2}i$

20. $x^2-4kx+(5-k^2)=0$이 두 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$D/4=4k^2-(5-k^2)\geq 0$

$4k^2-5+k^2\geq 0,\ 5k^2\geq 5,\ \therefore k^2\geq 1$

$\alpha+\beta=4k,\quad \alpha\beta=5-k^2$

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\ &= 16k^2-10+2k^2\\ &= 18k^2-10\end{aligned}$$

$18k^2\geq 18,\ 18k^2-10\geq 18-10$

$\alpha^2+\beta^2\geq 8,\ \therefore$ (최솟값)$=8$

21. 이차방정식 $x^2 + (k-4)x + 1 = 0$의 두 근이 모두 양수가 되도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k \le 2$　② $k \ge 2$　③ $-2 \le k < 2$
④ $4 < k \le 6$　⑤ $2 \le k < 4$

해설

양수이려면 판별식이 0보다 크거나 같고, 두근의 합, 곱이 양수이다.
(ⅰ) $D = (k-4)^2 - 4 \ge 0,\ \ k^2 - 8k + 12 \ge 0$
$(k-2)(k-6) \ge 0$
$k \le 2$ 또는 $k \ge 6$
(ⅱ) 두 근의 합 : $-(k-4) > 0$, $k < 4$
(ⅰ), (ⅱ) 의 공통부분을 구하면 $k \le 2$

22. 이차함수 $y = -x^2 + 4|x| - 3$ 이 최댓값을 갖도록 하는 실수 x 의 개수는?

① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개

④ 0 개　　⑤ 무수히많다.

해설

(i) $x \geq 0$ 일 때,

$y = -x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1$

(ii) $x < 0$ 일 때,

$y = -x^2 - 4x - 3 = -(x+2)^2 + 1$

이상에서 $x = -2,\ 2$ 일 때, y 는 최댓값을 가지므로 구하는 실수 x 의 개수는 2 개이다.

23. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 일 때 $x^2 - y^2 + z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3} = t$ 라 하면

$x = 2t-1$, $y = 5t+3$, $z = 3t-2$ 이므로

$x^2 - y^2 + z^2 = (2t-1)^2 - (5t+3)^2 + (3t-2)^2 = -12t^2 - 46t - 4$

$\cdots$ ㉠

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 이므로

$t \geq \frac{1}{2}$, $t \geq -\frac{3}{5}$, $t \geq \frac{2}{3}$

$\therefore\ t \geq \frac{2}{3}$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$t = \frac{2}{3}$ 일 때 최대이고 최댓값은

$-12\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 46 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -40$

24. 두 원 $x^2+(y-2)^2=4$, $(x-a)^2+(y-1)^2=1$에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a=\sqrt{3}$이면 두 원은 서로 다른 원의 내부에 있다.

㉡ $a=0$이면 두 원은 서로 접한다.

㉢ a의 값에 관계없이 한 원이 다른 원의 내부에 놓일 수 없다.

① ㉠　② ㉢　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 원 $x^2+(y-2)^2=4$, $(x-a)^2+(y-1)^2=1$의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{a^2+1}$이고 반지름의 길이는 각각 2, 1이다.
㉠ $a=\sqrt{3}$이면 $2-1<\sqrt{a^2+1}<2+1$이므로 두 원은 서로 다른 두 점에서 만난다. (거짓)
㉡ $a=0$이면 $\sqrt{a^2+1}=2-1$이므로 두 원은 서로 내접한다. (참)
㉢ $\sqrt{a^2+1}\geq 1$이므로 $\sqrt{a^2+1}<2-1$이 될 수 없다. 즉, 한 원이 다른 원의 내부에 놓을 수 없다. (참)
따라서, 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.

25. 함수 $f(x) = x^2 - 4x$ 에 대하여 좌표평면 위의 점 (a, b) 가 부등식 $y > f(x)$ 의 영역에 속할 때, 보기에서 항상 성립하는 부등식을 모두 고르면?

㉠ $\frac{b}{2} > f\left(\frac{a}{2}\right)$	㉡ $2b > f(2a)$	㉢ $-b < f(-a)$

① ㉠　② ㉠　③ ㉠, ㉡　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

점 (a, b) 가 $y > x^2 - 4x$ 를 만족하는 점이므로

$b > a^2 - 4a \cdots\cdots$ ㉠

㉠ $f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{4}a^2 - 2a < \frac{1}{2}a^2 - 2a$

㉠에서 $\frac{b}{2} > \frac{1}{2}a^2 - 2a$ 이므로

$\frac{b}{2} > f\left(\frac{a}{2}\right)$ (참)

㉡ $a = 3, b = 0$ 일 때, $0 > 3^2 - 4 \cdot 3$ 이므로

점 $(3, 0)$ 은 ㉠의 영역을 만족하는 점이다.

그런데 $2b = 0, f(2a) = f(6) = 6^2 - 24 = 12$ 이므로

$2b > f(2a)$ 가 성립하지 않는다. (거짓)

㉢ ㉠에서 $b > a^2 - 4a$

$-b < -a^2 + 4a < a^2 + 4a = f(-a)$

$\therefore -b < f(-a)$ (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.