

1. 좌표평면에서 세 점 A(-1, 1), B(2, 2), C(6, 0)에 대하여 △ABC의 세 변의 수직이등분선의 교점의 좌표는?

- ① (-1, -1)
- ② (2, -2)
- ③ (2, -3)
- ④ (-2, 3)
- ⑤ (-2, -3)

해설

$\overline{AB}$ 의 기울기 :  $\frac{2-1}{2-(-1)}$ , 중점은  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \Rightarrow$  수직이등분선  
:  $y = -3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$   
 $\overline{BC}$ 의 기울기는  $\frac{2-1}{6-2} = \frac{1}{4}$ , 중심은 (4, 1)  $\Rightarrow$  수직이등분  
선:  $y = 2(x - 4) + 1$   
두 직선의 교점을 구해보면  $x = 2, y = -3$   
 $\therefore$  세 변의 수직이등분선의 교점은 한 점에서 만나므로  
 $\therefore (2, -3)$

해설

세 점을 연결한 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 삼각형의 외심이므로 각 점에 이르는 거리가 같다.  
 $O(x, y)$ 라고 하면  
 $\overline{AO} = \overline{CO}$ 에서  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = (x-6)^2 + y^2, 7x - y = 17 \cdots \textcircled{A}$   
 $\overline{BO} = \overline{CO}$ 에서  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = (x-6)^2 + y^2, 2x - y = 7 \cdots \textcircled{B}$   
 $\textcircled{A} \textcircled{B}$ 에서 교점의 좌표는 (2, -3)

2. 세 점  $A(-2, 0)$ ,  $B(-1, \sqrt{3})$ ,  $C(1, -4)$  를 꼭지점으로 하는 삼각형  $ABC$  에서  $\angle A$  의 이등분선이 변  $BC$  와 만나는 점을  $D$  라 할 때,  $\triangle ABD$  와  $\triangle ACD$  의 넓이의 비는?

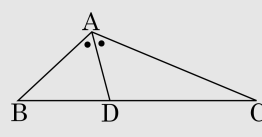
① 1 : 2      ② 1 : 3      ③ 1 : 4      ④ 2 : 3      ⑤ 2 : 5

해설

점  $D$  가  $\angle A$  의 이등분선과 변  $BC$  의 교점이므로

$$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{1+3} : \sqrt{9+16} = 2 : 5$$

$$\therefore \triangle ABD : \triangle ACD = \overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 5$$



3. 점 A(3, 2)와 직선  $3x - 4y - 11 = 0$  위의 점을 잇는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

①  $3x - 4y - 6 = 0$

②  $3x + 4y - 6 = 0$

③  $4x - 3y - 6 = 0$

④  $3x - 4y + 6 = 0$

⑤  $3x + 4y + 6 = 0$

해설

직선  $3x - 4y - 11 = 0$  위의 임의의 점을  $Q(a, b)$  라고 하면

$$3a - 4b - 11 = 0 \quad \dots \text{①}$$

$\overline{AQ}$ 의 중점을  $P(x, y)$  라고 하면

$$x = \frac{3+a}{2}, y = \frac{2+b}{2}$$

$$\therefore a = 2x - 3, b = 2y - 2 \quad \dots \text{②}$$

②를 ①에 대입하면

$$3(2x - 3) - 4(2y - 2) - 11 = 0$$

$$\therefore 3x - 4y - 6 = 0$$

4. 네 점 A(-2, 0), B(2, 0), C(2, 3), D(-2, 3)을 꼭지점으로 하는 직사각형 ABCD의 넓이가 직선  $mx + y - 2m = 0$ 에 의하여 이등분될 때, 상수  $m$ 의 값은?

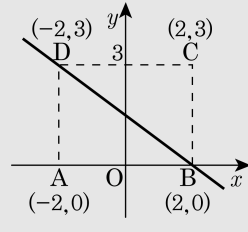
- ①  $\frac{1}{4}$       ②  $\frac{3}{4}$       ③  $\frac{5}{4}$       ④  $\frac{7}{4}$       ⑤  $\frac{9}{4}$

**해설**

직선  $mx + y - 2m = 0$

즉  $y = -m(x - 2)$ 은  $m$ 의 값에 관계없이 항상 점 B(2, 0)을 지난다.

이 때, 이 직선이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로 점 D(-2, 3)을 지나야 한다.



따라서, D(-2, 3)을 대입하면  $3 = -m(-2 - 2)$ 이므로

$$\therefore m = \frac{3}{4}$$



5. 다음은 서로 다른 세 점  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형  $ABC$ 의 넓이  $S$ 가  $S = \frac{1}{2}|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|$ 임을 보이는 과정이다.

선분 AB의 길이

$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 이고, 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기가  $\frac{(가)}{(나)}$ 이므로, 직선의 방정식은  $y - y_1 = \frac{(가)}{(나)}(x - x_1) \cdots \textcircled{나}$ 이 때, 점 C와 직선  $\textcircled{나}$ 사이의 거리  $d$ 는  $d = \frac{|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|}{\frac{(나)}{(가)}}$  따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는  $S = \frac{1}{2}|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|$ 이다.

이 과정에서 (가), (나)에 들어갈 내용을 바르게 짝지은 것은?

(가)

(나)

- ①  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \sqrt{(x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}$

②  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}$

③  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

④  $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

⑤  $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}, \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2}$

해설

- (가)  $\frac{(y\text{의 증가량})}{(x\text{의 증가량})} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(나) 점  $(x_1, y_1)$ 에서 직선  $ax + by + c = 0$ 사이의 거리  $d$ 는  $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 임을 이용하면  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 이다.

6. 두 정점 A(-3, 0), B(3, 0) 과 원  $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$  이 있다. 이 원 위에 있는 한 점 P( $a$ ,  $b$ ) 를 잡아  $\triangle PAB$  를 만들 때,  $\triangle PAB$  의 무게중심의 자취는 원이다. 이 자취의 길이를 구하면?

- ①  $\frac{5}{3}\pi$       ②  $\frac{5}{2}\pi$       ③  $\frac{4}{3}\pi$       ④  $\frac{10}{3}\pi$       ⑤  $\frac{9}{4}\pi$

해설

점 P( $a$ ,  $b$ ) 는 원  $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$  위에 있으므로  
 $a^2 + b^2 - 8b - 9 = 0 \dots \textcircled{1}$

$\triangle PAB$ 의 무게중심의 좌표를 ( $x$ ,  $y$ ) 라고 하면,

$$x = \frac{a}{3}, y = \frac{b}{3}$$

$$\therefore a = 3x, b = 3y$$

이것을  $\textcircled{1}$ 에 대입하면,

$$(3x)^2 + (3y)^2 - 8(3y) - 9 = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y = 1$$

$$x^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\therefore r = \frac{5}{3}$$

$$\therefore l = 2\pi r = 2 \times \frac{5}{3}\pi = \frac{10}{3}\pi$$

7. 원  $x^2 + y^2 + 2ax + 2y - 6 = 0$  이 원  $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$  의 둘레를 이등분할 때,  $a^2$  의 값은?

① 1                      ② 2                      ③ 4                      ④ 8                      ⑤ 9

해설

원  $x^2 + y^2 + 2ax + 2y - 6 = 0$  이  
원  $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$  의  
둘레를 이등분하려면  
두 원의 교점을 지나는 직선이  
원  $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$  의 중심을 지나야  
한다. 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은  
 $(x^2 + y^2 + 2ax + 2y - 6) - (x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2) = 0$   
 $2(a-1)x + 2(a+1)y - 4 = 0$   
 $\therefore (a-1)x + (a+1)y - 2 = 0 \dots \textcircled{1}$   
또, 원  $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$  을  
표준형으로 바꾸면,  
 $(x+1)^2 + (y-a)^2 = a^2 + 3$  이므로  
중심의 좌표는  $(-1, a)$  이다. 이 때, 직선  $\textcircled{1}$  이  
점  $(-1, a)$  를 지나야 하므로  $-(a-1) + a(a+1) - 2 = 0$   
 $a^2 - 1 = 0,$   
 $\therefore a^2 = 1$

8. 원  $x^2 + y^2 - 6ax + 2ay + 20a - 10 = 0$  은 정수  $a$  의 값에 관계없이 정점을 지난다. 그 정점을 구하면?

①  $(2, -1)$

②  $(3, -2)$

③  $(2, -2)$

④  $(-1, -2)$

⑤  $(3, -1)$

해설

$a$  에 대한 항등식 꼴로 나타내면

$$a(-6x + 2y + 20) + (x^2 + y^2 - 10) = 0$$

$$\begin{cases} -6x + 2y + 20 = 0 \rightarrow y = 3x - 10 \cdots ① \\ x^2 + y^2 = 10 \cdots ② \end{cases}$$

①, ②를 연립하면

$$x^2 + (3x - 10)^2 = 10$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x - 3)^2 = 0$$

$$\therefore x = 3, y = -1$$



9. A(3, -1)에서 원  $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식을 구하면?

①  $x - 2y - 6 = 0, 2x + y - 4 = 0$

②  $x - 2y - 5 = 0, 2x + y - 5 = 0$

③  $x - 2y - 4 = 0, 2x + y - 5 = 0$

④  $x - 2y - 3 = 0, 2x + y - 4 = 0$

⑤  $x - 2y - 2 = 0, 2x + y - 3 = 0$

해설

점 A를 지나는 접선의 기울기를  $m$ 이라 하면,  $y = m(x - 3) - 1$  접선이므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{2}, -2$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, y = -2x + 5 \text{ 이므로}$$

접선의 방정식은  $x - 2y - 5 = 0$  or  $2x + y - 5 = 0$

10.  $a$  는 실수이고 원  $x^2 - 2ax + y^2 - 4|a|y + 5a^2 - 1 = 0$  의 중심과 점  $(-3, 1)$  과의 거리를  $f(a)$  라고 할 때,  $f(a)$  의 최솟값은?

①  $\sqrt{3}$       ② 2      ③  $\sqrt{5}$       ④  $\sqrt{6}$       ⑤ 3

해설

주어진 원의 방정식을 표준형으로 고치면

$$(x-a)^2 + (y-2|a|)^2 = 1$$

$\therefore$  중심  $(a, 2|a|)$

$$\begin{aligned}\therefore f(a) &= \sqrt{(a+3)^2 + (2|a|-1)^2} \\ &= \sqrt{5a^2 + 6a - 4|a| + 10}\end{aligned}$$

( i )  $a \geq 0$  일 때

$$f(a) = \sqrt{5a^2 + 2a + 10}$$

$$= \sqrt{5\left(a + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{49}{5}} \geq \sqrt{10}$$

( ii )  $a < 0$  일 때

$$f(a) = \sqrt{5a^2 + 10a + 10}$$

$$= \sqrt{5(a+1)^2 + 5} \geq \sqrt{5}$$

따라서  $f(a)$  의 최솟값은  $\sqrt{5}$