1. 다음 삼차방정식의 정수해를 구하여라.

$$x^3 - 1 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x^3 - 1 = 0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ 정수해는 $x = 1$

2. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y+z=12 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+2z=5 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$, $z=c$ 라 할 때, abc 의 값은?

① -14 ② -7 ③ 0 ④ 7 ⑤ 14

해설

$\begin{cases} 2x+y+z=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y+z=3 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+y+2z=5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠ + ㉡ + ㉢을 하면 $4(x+y+z)=20$

$\therefore\ x+y+z=5 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉠ − ㉣ 에서 $x=7$

㉡ − ㉣ 에서 $y=-2$

㉢ − ㉣ 에서 $z=0$

$\therefore\ a=7,\ b=-2,\ c=0$

$\therefore\ abc=0$

3. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x - y = 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x = y + 1$을 ㉡에 대입하면,

$(y + 1)^2 + y^2 = 5$

$y^2 + y - 2 = 0$

$(y + 2)(y - 1) = 0$

$\therefore\ y = -2$ 또는 $y = 1$

$y = -2$를 ㉠에 대입하면 $x = -1$

$y = 1$을 ㉡에 대입하면 $x = 2$

$\therefore\ xy = 2$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x + y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

$(x - y)(x - 2y)$

$\Rightarrow \quad (x - y)(x - 2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = y$

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$

ii) $x = 2y$

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$x + y = (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

5. 방정식 $(x^2+x+2)^2 = x^2+x+4$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① -5　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

해설

$(x^2+x+2)^2 = x^2+x+4$에서
$x^2+x+2 = A$라 하면
$A^2 = A+2$,
$A^2-A-2=0$, $(A+1)(A-2)=0$
$\therefore\ A=-1$ 또는 $A=2$
(i) $x^2+x+2=-1$일 때, $x^2+x+3=0$
(ii) $x^2+x+2=2$일 때, $x^2+x=0$
(i), (ii)에서 α, β는 허근이므로 $x^2+x+3=0$의 근이 된다.
따라서, $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=3$이므로
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\times 3=-5$

6. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면$(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.

$\therefore\ b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4,\ b = 6$ 이다.

$\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

7. 다음은 삼차방정식 $x^3+px+1=0$의 한 근을 α라고 할 때, $-\alpha$ 는 $x^3+px-1=0$의 근이고, $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3+px^2+1=0$의 근임을 보인 과정이다. (가)~(마) 에 들어갈 말로 옳지 <u>않은</u> 것은?

α는 $x^3+px+1=0$의 근이므로 $\alpha^3+p\alpha+1=0$ $\cdots$ ㉠ $f(x)=x^3+px-1$이라고 하면 $f(-\alpha)=$ (가)$=$ (나) $=0$ ($\because$ ㉠) 따라서 $-\alpha$는 $x^3+px-1=0$의 근이다. 또 $g(x)=x^3+px^2+1$ 이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=$ (다)$=$ (라)$=$ (마) $=0$($\because$ ㉠) 따라서, $\frac{1}{\alpha}$은 $x^3+px^2+1=0$ 의 근이다.

① (가) $(-\alpha)^3+p(-\alpha)-1$　② (나) $-(\alpha^3-p\alpha+1)$
③ (다) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+1$　④ (라) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3(1+p\alpha+\alpha^3)$
⑤ (마) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3\cdot 0$

해설

α는 $x^3+px+1=0$의 근이므로 $\alpha^3+p\alpha+1=0$ $\cdots$ ㉠
$f(x)=x^3+px-1$이라고 하면 $f(-\alpha)=(-\alpha)^3+p(-\alpha)-1$
$=-(\alpha^3+p\alpha+1)=0$ ($\because$ ㉠)
따라서 $-\alpha$ 는 $x^3+px-1=0$의 근이다.
또 $g(x)=x^3+px^2+1$ 이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+1$
$=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3(1+p\alpha+\alpha^3)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3\cdot 0=0$ ($\because$ ㉠)
따라서 $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3+px^2+1=0$ 의 근이다.

8. 연립방정식 $\begin{cases} xy+2yz=8 \\ yz+2zx=15 \\ zx+2xy=10 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y, z에 대하여 $x^2+y^2+z^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$xy+2yz=8 \quad \cdots ㉠$
$yz+2zx=15 \cdots ㉡$
$zx+2xy=10 \cdots ㉢$
㉠ + ㉡ + ㉢하면 $3(xy+yz+zx)=33$
$xy+yz+zx=11 \quad \cdots ㉣$
㉠ − ㉣하면 $yz-zx=-3 \quad \cdots ㉤$
㉢ − ㉤하면 $3zx=18$
$zx=6 \cdots ㉥$
$xy=2 \cdots ㉦$
$yz=3 \cdots ㉧$
㉥ × ㉦ × ㉧하면 $(xyz)^2=36$
$xyz=\pm 6$
$\therefore \ x=\pm 2, y=\pm 1, z=\pm 3$ (복호동순이 아님)
$\therefore \ x^2+y^2+z^2=4+1+9=14$

9. 국어, 수학, 영어의 세 문제집이 있다. 17000 원으로 국어와 수학 문제집을, 18000 원으로 수학과영어 문제집을 19000 원으로 국어와 영어 문제집을 살 수 있었다. 이 때, 수학 문제집의 가격은?

① 7000 원 ② 7500 원 ③ 8000 원
④ 8500 원 ⑤ 9000 원

해설

국어 문제집의 가격을 A 원, 수학 문제집의 가격을 B 원, 영어 문제집의 가격을 C 원이라고 하면,

$$\begin{cases} A + B = 17000 \cdots ㉠ \\ B + C = 18000 \cdots ㉡ \\ C + A = 19000 \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠ + ㉡ + ㉢를 해주면, $2(A + B + C) = 54000$
$\therefore\ A + B + C = 2700$
$\therefore\ A = 9000,\ B = 8000,\ C = 10000$
$\therefore$ 수학 문제집의 가격은 8000 원

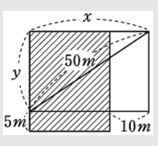
10. 대각선의 길이가 50 m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5 m 늘리고, 가로를 10 m 줄이면 넓이가 50 m² 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답 : ________ m

▷ 정답 : 48 m

해설

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots ㉠ \\ (x-10)(y+5) = xy + 50 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$\therefore\ x = 2y + 20 \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$(2y+20)^2 + y^2 = 50^2$

$y^2 + 16y - 420 = 0$

$(y-14)(y+30) = 0$

$\therefore\ y = 14,\ -30$

그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

이것을 ㉢에 대입하면 $x = 48$

11. 방정식 $2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 의 곱 xy 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 에서
$(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) = 0$
$(x + y)^2 + (x - 2)^2 = 0$
x, y가 실수이므로 $x + y = 0$, $x - 2 = 0$
$\therefore\ x = 2,\ y = -2$
$\therefore\ xy = -4$

12. 방정식 $2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$의 모든 실근의 합을 a, 모든 허근의 곱을 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 5 ② 3 ③ $\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ 4

해설

$2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$양변을

x^2으로 나누고 정리하면

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$

$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$

$2t^2-5t-3=(2t+1)(t-3)=0$

$\left(2x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0$

$\therefore (2x^2+x+2)(x^2-3x+1)=0$

이 때, $2x^2+x+2=0$은 허근을 갖고,

$x^2-3x+1=0$은 실근을 가지므로

실근의 합 $a=3$, 허근의 곱 $b=1$이다.

$\therefore a+b=4$

13. 연립방정식 $x+y+z=-\frac{1}{2}$, $xy+yz+zx=-\frac{5}{2}$, $xyz=-1$을 만족시키는 해의 쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

근과 계수와의 관계에서
x, y, z를 세 근으로 하는
삼차방정식을 만들면

$t^3+\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}t+1=0$

$\Leftrightarrow 2t^3+t^2-5t+2=0$

$\Leftrightarrow (t-1)(2t-1)(t+2)=0$

$\therefore\ (x, y, z)=$

$\left(1, \frac{1}{2}, -2\right)$, $\left(1, -2, \frac{1}{2}\right)$,

$\left(\frac{1}{2}, 1, -2\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -2, 1\right)$,

$\left(-2, 1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$

14. $x^3 = 1$ 의 세 근이 a, b, c 이다. $22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$ 의 값이 실수 일 때, 이 실수 값을 구하면?

① 60　　② 65　　③ 68　　④ 72　　⑤ 75

해설

$x^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad a^3 = 1 \quad b^3 = 1 \quad c^3 = 1$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \quad \cdots \quad ①$

$\therefore \; 22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$

$= 22(a^3)^7 + 21(b^3)^7 b + 22(c^3)^7$

$= 21b + 44$ 이 값이 실수이므로

① 에서 $b = 1$ 이다.

$\therefore \; 21b + 44 = 65$

15. 두 이차방정식 $3x^2-(k+1)x+4k=0$, $3x^2+(2k-1)x+k=0$이 단 하나의 공통인 근 α를 가질 때, $3k+\alpha$의 값은? (단, k는 실수인 상수)

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

공통근이 α이므로
$3\alpha^2-(k+1)\alpha+4k=0$
$3\alpha^2+(2k-1)\alpha+k=0$
두 식을 변변끼리 빼면 $3k(\alpha-1)=0$
$k=0$ 또는 $\alpha=1$
$k=0$이면 두 식이 같아지므로
조건에 맞지 않는다.
$\therefore$ $\alpha=1$을 대입하면
$3-(k+1)+4k=0,\quad k=-\dfrac{2}{3}$
$\therefore$ $3k+\alpha=-1$

16. 대학수학능력시험 수리탐구 영역(Ⅰ)의 문항 수는 30개이고 배점은 40점이다. 문항별 배점은 1점, 1.5점, 2점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

1점짜리 문항을 x개,
1.5점짜리 문항을 y개,
2점짜리 문항을 z개라고 하면
$x + 1.5y + 2z = 40 \cdots$ ㉠
$x + y + z = 30 \cdots$ ㉡
$(x \geq 1,\ y \geq 1,\ z \geq 1)$라고 하면
㉠ $\times 2 -$ ㉡ $\times 3 = -x + z = -10$,
$x = z + 10,\ z \geq 1$이므로
$x = z + 10 \geq 11$
이 때 $y = 18$이고 준 조건을 만족하므로
x의 최솟값은 11

17. 사차방정식 $x^4-2x^2+ax+b=0$이 허근 $1+2i$를 가질 때, 실근 α,β와 a,b의 합 $\alpha+\beta+a+b$의 값은? (단, a,b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$)

① -3　② -1　③ 2　④ 5　⑤ 7

해설

계수가 실수이므로 $1+2i$가 근이면 $1-2i$도 근이다.
따라서 $f(x)=x^4-2x^2+ax+b$는 $\{x-(1+2i)\}\{x-(1-2i)\}$
즉, x^2-2x+5로 나누어 떨어져야 한다.
$f(x)=x^4-2x^2+ax+b=(x^2-2x+5)(x^2+2x-3)+(a-16)x+b+15$
따라서, $a=16,\ b=-15$
$x^2+2x-3=0$에서 $\alpha+\beta=-2$
$\therefore\ \alpha+\beta+a+b=-1$

18. 삼차방정식 $x^3 - mx - 2 = 0$의 근이 모두 정수일 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $m = 3$

해설

세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha \geq \beta \geq \gamma)$ 라 하면

$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \cdots\cdots①$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -m \quad \cdots\cdots②$

$\alpha\beta\gamma = 2 \quad \cdots\cdots③$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 는 정수이므로 ③에서

$(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (2, -1, -1)$, $(1, -1, -2)$, $(2,\ 1,\ 1)$

이 중에서 ①에 맞는 것은

$(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (2,\ -1,\ -1)$

따라서 ②로부터 $-2 + 1 - 2 = -m$

$\therefore\ m = 3$

19. 연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=-5 \cdots\cdots ① \\ x^2+xy+y^2=7 \cdots\cdots ② \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대해 $x+y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ 2　　⑤ -2

해설

$x+y=u,\ xy=v$ 로 놓으면

①은 $u+v=-5 \cdots\cdots$ ③

②는 $u^2-v=7 \cdots\cdots$ ④

③, ④에서 v 를 소거하면

$u^2+u-2=0$

$\therefore\ (u-1)(u+2)=0$

$u=1$ 일 때, $v=-6$ 이므로

$t^2-t-6=0$ 에서 $t=-2,\ 3$

$u=-2$ 일 때, $v=-3$ 이므로

$t^2+2t-3=0$ 에서 $t=1,\ -3$

따라서, 구하는 근은

$\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$

$\therefore\ M=1,\ \ m=-2\ \ \therefore\ \ M+m=-1$

20. 방정식 $x^2 - 12x + 35 = 3^y$ 을 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 에 대하여 $x_1 + x_2 + y_1 + y_2$ 의 값을 구하면?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

해설

$x^2 - 12x + 35 = (x-6)^2 - 1 = 3^y$ 에서 $x - 6 = t$ 라 하면

$t^2 - 1 = 3^y, \quad (t-1)(t+1) = 3^y$

따라서, $t+1,\ t-1$ 은 3^n 꼴이고 차가 2이므로 $y = 1$ 이다.

$(t+1,\ t-1) = (3,\ 1),\ (-1,\ -3)$

$\therefore\ t = 2,\ -2 \quad \therefore\ (x,\ y) = (8,\ 1),\ (4,\ 1)$

$\therefore\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 14$