

1. 다음 삼차방정식의 정수해를 구하여라.

$x^3 - 1 = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^3 - 1 = 0$ 에서 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
 $\therefore$ 정수해는 $x = 1$

2. 연립방정식
$$\begin{cases} 2x + y + z = 12 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + 2z = 5 \end{cases}$$
 의 해를 $x = a, y = b, z = c$ 라 할 때, abc 의 값은?

① -14 ② -7 ③ 0 ④ 7 ⑤ 14

해설

$$\begin{cases} 2x + y + z = 12 & \cdots \textcircled{㉠} \\ x + 2y + z = 3 & \cdots \textcircled{㉡} \\ x + y + 2z = 5 & \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

$$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢} \text{을 하면 } 4(x + y + z) = 20$$

$$\therefore x + y + z = 5 \quad \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉣} \text{에서 } x = 7$$

$$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉣} \text{에서 } y = -2$$

$$\textcircled{㉢} - \textcircled{㉣} \text{에서 } z = 0$$

$$\therefore a = 7, b = -2, c = 0$$

$$\therefore abc = 0$$

3. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{cases} x-y=1 & \cdots \textcircled{A} \\ x^2+y^2=5 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

①에서 $x=y+1$ 을 ②에 대입하면,

$$(y+1)^2+y^2=5$$

$$y^2+y-2=0$$

$$(y+2)(y-1)=0$$

$$\therefore y=-2 \text{ 또는 } y=1$$

$$y=-2 \text{ 를 } \textcircled{A} \text{ 에 대입하면 } x=-1$$

$$y=1 \text{ 을 } \textcircled{A} \text{ 에 대입하면 } x=2$$

$$\therefore xy=2$$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x+y$

값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$

② 4

③ $-3\sqrt{2}$

④ -4

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + 2y^2 &= 0 \\ (x - y)(x - 2y) &= 0 \\ \Rightarrow (x - y)(x - 2y) &= 0 \\ \Rightarrow x = y \text{ 또는 } x = 2y \\ \text{i) } x = y \\ x^2 + 2y^2 &= 3x^2 = 12 \\ x = \pm 2 &\Rightarrow y = \pm 2 \\ \text{ii) } x = 2y \\ x^2 + 2y^2 &= 6y^2 = 12 \\ y = \pm \sqrt{2} &\Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \\ x + y &= (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}) \end{aligned}$$

5. 방정식 $(x^2 + x + 2)^2 = x^2 + x + 4$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$(x^2 + x + 2)^2 = x^2 + x + 4$ 에서
 $x^2 + x + 2 = A$ 라 하면
 $A^2 = A + 2,$
 $A^2 - A - 2 = 0, (A + 1)(A - 2) = 0$
 $\therefore A = -1$ 또는 $A = 2$
(i) $x^2 + x + 2 = -1$ 일 때, $x^2 + x + 3 = 0$
(ii) $x^2 + x + 2 = 2$ 일 때, $x^2 + x = 0$
(i), (ii)에서 α, β 는 허근이므로 $x^2 + x + 3 = 0$ 의 근이 된다.
따라서, $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 3$ 이므로
 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2 \times 3 = -5$

6. 방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서 $1 + i$ 가 근이면 $1 - i$ 도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 이다. 따라서 $x^3 - ax^2 + bx - 4$ 는 $x^2 - 2x + 2$ 로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면 $(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$ 이다.
 $\therefore b - 2a + 2 = 0$ 과 $-8 + 2a = 0$ 에서 $a = 4$, $b = 6$ 이다.
 $\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

7. 다음은 삼차방정식 $x^3 + px + 1 = 0$ 의 한 근을 α 라고 할 때, $-\alpha$ 는 $x^3 + px - 1 = 0$ 의 근이고, $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3 + px^2 + 1 = 0$ 의 근임을 보인 과정이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

α 는 $x^3 + px + 1 = 0$ 의 근이므로 $\alpha^3 + p\alpha + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{가}$
 $f(x) = x^3 + px - 1$ 이라고 하면 $f(-\alpha) = (-\alpha)^3 + p(-\alpha) - 1 = -(\alpha^3 + p\alpha + 1) = 0 \quad (\because \textcircled{가})$
따라서 $-\alpha$ 는 $x^3 + px - 1 = 0$ 의 근이다. 또 $g(x) = x^3 + px^2 + 1$ 이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + 1 = 0 \quad (\because \textcircled{가})$
따라서, $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3 + px^2 + 1 = 0$ 의 근이다.

- ① (가) $(-\alpha)^3 + p(-\alpha) - 1$ ② (나) $-(\alpha^3 - p\alpha + 1)$
③ (다) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + 1$ ④ (라) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 (1 + p\alpha + \alpha^3)$
⑤ (마) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \cdot 0$

해설

α 는 $x^3 + px + 1 = 0$ 의 근이므로 $\alpha^3 + p\alpha + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{가}$
 $f(x) = x^3 + px - 1$ 이라고 하면 $f(-\alpha) = (-\alpha)^3 + p(-\alpha) - 1 = -(\alpha^3 + p\alpha + 1) = 0 \quad (\because \textcircled{가})$
따라서 $-\alpha$ 는 $x^3 + px - 1 = 0$ 의 근이다.
또 $g(x) = x^3 + px^2 + 1$ 이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 (1 + p\alpha + \alpha^3) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \cdot 0 = 0 \quad (\because \textcircled{가})$
따라서 $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3 + px^2 + 1 = 0$ 의 근이다.

8. 연립방정식
$$\begin{cases} xy + 2yz = 8 \\ yz + 2zx = 15 \\ zx + 2xy = 10 \end{cases}$$
 을 만족하는 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\begin{aligned} xy + 2yz &= 8 \quad \cdots \textcircled{㉠} \\ yz + 2zx &= 15 \cdots \textcircled{㉡} \\ zx + 2xy &= 10 \cdots \textcircled{㉢} \\ \textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢} \text{하면 } 3(xy + yz + zx) &= 33 \\ xy + yz + zx &= 11 \quad \cdots \textcircled{㉣} \\ \textcircled{㉠} - \textcircled{㉣} \text{하면 } yz - zx &= -3 \quad \cdots \textcircled{㉤} \\ \textcircled{㉡} - \textcircled{㉤} \text{하면 } 3zx &= 18 \\ zx &= 6 \cdots \textcircled{㉥} \\ xy &= 2 \cdots \textcircled{㉦} \\ yz &= 3 \cdots \textcircled{㉧} \\ \textcircled{㉥} \times \textcircled{㉦} \times \textcircled{㉧} \text{하면 } (xyz)^2 &= 36 \\ xyz &= \pm 6 \\ \therefore x = \pm 2, y = \pm 1, z = \pm 3 \text{ (복호동순이 아님)} \\ \therefore x^2 + y^2 + z^2 &= 4 + 1 + 9 = 14 \end{aligned}$$

9. 국어, 수학, 영어의 세 문제집이 있다. 17000 원으로 국어와 수학 문제집을, 18000 원으로 수학과영어 문제집을 19000 원으로 국어와 영어 문제집을 살 수 있었다. 이 때, 수학 문제집의 가격은?
- ① 7000 원 ② 7500 원 ③ 8000 원
④ 8500 원 ⑤ 9000 원

해설

국어 문제집의 가격을 A 원, 수학 문제집의 가격을 B 원, 영어 문제집의 가격을 C 원이라고 하면,

$$\begin{cases} A + B = 17000 \cdots \textcircled{1} \\ B + C = 18000 \cdots \textcircled{2} \\ C + A = 19000 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}$ 를 해주면, $2(A + B + C) = 54000$
 $\therefore A + B + C = 2700$
 $\therefore A = 9000, B = 8000, C = 10000$
 $\therefore$ 수학 문제집의 가격은 8000 원

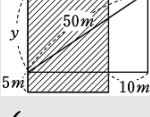
10. 대각선의 길이가 50 m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5 m 늘리고, 가로를 10 m 줄이면 넓이가 50 m² 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답 : m

▷ 정답 : 48 m

해설

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots \textcircled{1} \\ (x - 10)(y + 5) = xy + 50 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$$\therefore x = 2y + 20 \cdots \textcircled{3}$$

③을 ①에 대입하면

$$(2y + 20)^2 + y^2 = 50^2$$

$$y^2 + 16y - 420 = 0$$

$$(y - 14)(y + 30) = 0$$

$$\therefore y = 14, -30$$

그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

이것을 ③에 대입하면 $x = 48$

11. 방정식 $2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 의 곱 xy 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 에서
 $(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) = 0$
 $(x + y)^2 + (x - 2)^2 = 0$
 x, y 가 실수이므로 $x + y = 0, x - 2 = 0$
 $\therefore x = 2, y = -2$
 $\therefore xy = -4$

12. 방정식 $2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ 의 모든 실근의 합을 a , 모든 허근의 곱을 b 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 5 ② 3 ③ $\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ 4

해설

$2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ 양변을
 x^2 으로 나누고 정리하면
 $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$
 $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$
 $2t^2 - 5t - 3 = (2t + 1)(t - 3) = 0$
 $\left(2x + \frac{2}{x} + 1\right)\left(x + \frac{1}{x} - 3\right) = 0$
 $\therefore (2x^2 + x + 2)(x^2 - 3x + 1) = 0$
이 때, $2x^2 + x + 2 = 0$ 은 허근을 갖고,
 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 은 실근을 가지므로
실근의 합 $a = 3$, 허근의 곱 $b = 1$ 이다.
 $\therefore a + b = 4$

13. 연립방정식 $x+y+z = -\frac{1}{2}$, $xy+yz+zx = -\frac{5}{2}$, $xyz = -1$ 을 만족시키는
해의 쌍 (x,y,z) 의 개수는?

- ① 3 개
- ② 4 개
- ③ 5 개
- ④ 6 개
- ⑤ 7 개

해설

근과 계수와의 관계에서
 x, y, z 를 세 근으로 하는
삼차방정식을 만들면
$$t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 5t + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (t-1)(2t-1)(t+2) = 0$$
$$\therefore (x,y,z) =$$
$$\left(1, \frac{1}{2}, -2\right), \left(1, -2, \frac{1}{2}\right),$$
$$\left(\frac{1}{2}, 1, -2\right), \left(\frac{1}{2}, -2, 1\right),$$
$$\left(-2, 1, \frac{1}{2}\right), \left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$$

14. $x^3 = 1$ 의 세 근이 a, b, c 이다. $22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$ 의 값이 실수 일 때, 이 실수 값을 구하면?

① 60

② 65

③ 68

④ 72

⑤ 75

해설

$x^3 = 1 \Rightarrow a^3 = 1 \quad b^3 = 1 \quad c^3 = 1$
 $\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \quad \dots \quad \textcircled{1}$
 $\therefore 22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$
 $= 22(a^3)^7 + 21(b^3)^7b + 22(c^3)^7$
 $= 21b + 44$ 이 값이 실수이므로
①에서 $b = 1$ 이다.
 $\therefore 21b + 44 = 65$

15. 두 이차방정식 $3x^2 - (k+1)x + 4k = 0$, $3x^2 + (2k-1)x + k = 0$ 이
단 하나의 공통인 근 α 를 가질 때, $3k + \alpha$ 의 값은? (단, k 는 실수인
상수)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근이 α 이므로
 $3\alpha^2 - (k+1)\alpha + 4k = 0$
 $3\alpha^2 + (2k-1)\alpha + k = 0$
두 식을 변변끼리 빼면 $3k(\alpha - 1) = 0$
 $k = 0$ 또는 $\alpha = 1$
 $k = 0$ 이면 두 식이 같아지므로
조건에 맞지 않는다.
 $\therefore \alpha = 1$ 을 대입하면
 $3 - (k+1) + 4k = 0, \quad k = -\frac{2}{3}$
 $\therefore 3k + \alpha = -1$

16. 대학수학능력시험 수리탐구 영역 (I) 의 문항 수는 30 개이고 배점은 40 점이다. 문항별 배점은 1 점, 1.5 점, 2 점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1 점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

- ① 8
- ② 9
- ③ 10
- ④ 11
- ⑤ 12

해설

1 점짜리 문항을 x 개,
1.5 점짜리 문항을 y 개,
2 점짜리 문항을 z 개라고 하면
 $x + 1.5y + 2z = 40 \cdots \textcircled{1}$
 $x + y + z = 30 \cdots \textcircled{2}$
($x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$) 라고 하면
 $\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} \times 3 = -x + z = -10,$
 $x = z + 10, z \geq 1$ 이므로
 $x = z + 10 \geq 11$
이 때 $y = 18$ 이고 준 조건을 만족하므로
 x 의 최솟값은 11

17. 사차방정식 $x^4 - 2x^2 + ax + b = 0$ 이 허근 $1 + 2i$ 를 가질 때, 실근 α, β 와 a, b 의 합 $\alpha + \beta + a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수이고 $i = \sqrt{-1}$)

① -3

② -1

③ 2

④ 5

⑤ 7

해설

계수가 실수이므로 $1 + 2i$ 가 근이면 $1 - 2i$ 도 근이다.

따라서 $f(x) = x^4 - 2x^2 + ax + b$ 는 $\{x - (1 + 2i)\} \{x - (1 - 2i)\}$

즉, $x^2 - 2x + 5$ 로 나누어 떨어져야 한다.

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + ax + b = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + 2x - 3) + (a - 16)x + b + 15$$

$$\text{따라서, } a = 16, b = -15$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \text{에서 } a + \beta = -2$$

$$\therefore \alpha + \beta + a + b = -1$$

18. 삼차방정식 $x^3 - mx - 2 = 0$ 의 근이 모두 정수일 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 3$

해설

세 근을 α, β, γ ($\alpha \geq \beta \geq \gamma$) 라 하면
 $\alpha + \beta + \gamma = 0 \dots\dots\dots ①$
 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -m \dots\dots\dots ②$
 $\alpha\beta\gamma = 2 \dots\dots\dots ③$
 α, β, γ 는 정수이므로 ③에서
 $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -1, -1), (1, -1, -2), (2, 1, 1)$
이 중에서 ①에 맞는 것은
 $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -1, -1)$
따라서 ②로부터 $-2 + 1 - 2 = -m$
 $\therefore m = 3$

19. 연립방정식 $\begin{cases} xy + x + y = -5 \dots\dots ① \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \dots\dots ② \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대해

$x + y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ -1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$x + y = u, xy = v$ 로 놓으면

①은 $u + v = -5 \dots\dots ③$

②는 $u^2 - v = 7 \dots\dots ④$

③, ④에서 v 를 소거하면

$$u^2 + u - 2 = 0$$

$$\therefore (u - 1)(u + 2) = 0$$

$u = 1$ 일 때, $v = -6$ 이므로

$$t^2 - t - 6 = 0 \text{에서 } t = -2, 3$$

$u = -2$ 일 때, $v = -3$ 이므로

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \text{에서 } t = 1, -3$$

따라서, 구하는 근은

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\therefore M = 1, m = -2 \therefore M + m = -1$$

20. 방정식 $x^2 - 12x + 35 = 3^y$ 을 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 에 대하여 $x_1 + x_2 + y_1 + y_2$ 의 값을 구하면?

- ① 10
- ② 11
- ③ 12
- ④ 13
- ⑤ 14

해설

$x^2 - 12x + 35 = (x - 6)^2 - 1 = 3^y$ 에서 $x - 6 = t$ 라 하면
 $t^2 - 1 = 3^y, \quad (t - 1)(t + 1) = 3^y$
따라서, $t + 1, t - 1$ 은 3^n 꼴이고 차가 2이므로 $y = 1$ 이다.
 $(t + 1, t - 1) = (3, 1), (-1, -3)$
 $\therefore t = 2, -2 \quad \therefore (x, y) = (8, 1), (4, 1)$
 $\therefore x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 14$