1. 연립부등식 $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases}$ 의 해는?

① $-2 \leq x < 3$　　② $-2 < x < 3$　　③ $2 \leq x < 3$

④ $2 < x \leq 3$　　⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$x^2 - 2x + x - 2 \geq 0$ 에서
$x^2(x-2) + (x-2) \geq 0$
$\therefore (x-2)(x^2+1) \geq 0$
$x^2 + 1 > 0$ 이므로 $x - 2 \geq 0$
$\therefore x \geq 2 \cdots$ ㈎
$x^2 - x - 6 < 0$ 에서 $(x-3)(x+2) < 0$
$\therefore -2 < x < 3 \cdots$ ㈏
따라서 ㈎, ㈏의 공통 범위를 구하면
$2 \leq x < 3$ 이다.

2. 이차부등식 $x^2-2x-3>3|x-1|$의 해가 이차부등식 $ax^2+2x+c<0$의 해와 같을 때, 실수 a, c의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

1) $x \geq 1$ 일 때,

$x^2-2x-3>3x-3$, $x^2-5x>0$

$x(x-5)>0$, $x<0$ 또는 $x>5$

$\therefore x>5$

2) $x<1$ 일 때,

$x^2-2x-3>-3x+3$, $x^2+x-6>0$

$(x+3)(x-2)>0$, $x<-3$ 또는 $x>2$

$\therefore x<-3$

1), 2) 에서 $x<-3$ 또는 $x>5$

한편 $ax^2+2x+c<0$ 의 해가

$x<-3$ 또는 $x>5$ 이므로

$a<0$이고, $ax^2+2x+c=a(x+3)(x-5)$이다.

$ax^2+2x+c=ax^2-2ax-15a$에서

$a=-1, c=15$ $\quad \therefore a+c=14$

3. 두 부등식 $x^2 - x - 2 > 0$, $x^2 - (a-3)x - 3a < 0$를 동시에 만족하는 정수가 -2뿐일 때, a의 값의 범위를 구하면 $m < a \le n$이다. mn의 값을 구하시오.

▶ 답 :

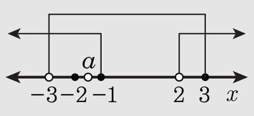
▷ 정답 : -6

해설

$x^2 - x - 2 > 0$에서 $x < -1$, $x > 2$

$x^2 - (a-3)x - 3a < 0$에서

$(x+3)(x-a) < 0$



그림에서와 같이 동시에 만족하는

정수값이 -2뿐이려면 $-2 < a \le 3$이다.

$\therefore\ -2 < a \le 3$

4. 세 변의 길이가 $x,\ x+1,\ x+2$인 삼각형이 둔각삼각형이 되는 x의 범위가 $\alpha < x < \beta$일 때,$\alpha+\beta$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x > 0 \cdots\cdots$ ㉠
$x+2$가 최대변이므로
$x+2 < (x+1)+x \quad \therefore\ x > 1 \cdots\cdots$ ㉡
둔각삼각형이 되는 조건은
$(x+2)^2 > (x+1)^2 + x^2$
$\therefore\ -1 < x < 3 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 공통범위를 구하면
$1 < x < 3$
$\therefore\ \alpha = 1,\ \beta = 3$
$\therefore\ \alpha+\beta = 4$

5. 모든 내각의 크기가 $180°$ 보다 작은 육각형의 각 변의 길이가 $10,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2x,\ y$ 일 때, x^2+y^2 의 최솟값은? (단, $x,\ y$ 는 자연수)

① 2 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 13

해설

다각형의 결정조건에 의해 $2x+y>5$
$x,\ y$ 는 자연수이므로,
$x=2,\ y=2$ 일 때 최소가 된다.
$\therefore x^2+y^2=8$

6. 이차방정식 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$의 두 근이 모두 1보다 클 때 실수 a의 값의 범위는?

① $0 \le a < 1$　　② $1 \le a < 2$　　③ $2 \le a < 3$

④ $3 \le a < 4$　　⑤ $4 \le a < 5$

해설

$f(x) = x^2 - 2ax + a + 2 = (x-a)^2 - a^2 + a + 2$

ⅰ) $D/4 = a^2 - a - 2 \ge 0,\quad a \le -1 \ or \ a \ge 2$

ⅱ) $f(1) = 1 - 2a + a + 2 > 0 \quad \therefore a < 3$

ⅲ) 대칭축 $x = a > 1$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 $2 \le a < 3$

7. 이차방정식 $x^2-2x+k=0$ 의 두 근이 각각 0 과 1 및 1과 2 사이에 있도록 k 값의 범위를 구하면?

① $k<0$, $k>1$ ② $k\le 0$, $k\ge 2$ ③ $0<k<1$
④ $0\le k\le 1$ ⑤ $0<k<2$

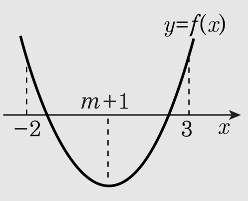
해설
$x^2-2x+k=f(x)$ 라 하면
$f(0)>0, f(1)<0, f(2)>0$
$\therefore k>0, k<1$
$\therefore 0<k<1$

8. 이차방정식 $x^2-2(m+1)x+m+3=0$의 두 실근이 -2와 3사이에 있을 때, 정수 m의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2개

해설



$f(x)=x^2-2(m+1)x+m+3$ 으로 놓으면

(i) $\dfrac{D}{4}=(m+1)^2-(m+3)\geq 0$ 에서

$(m-1)(m+2)\geq 0$

$\therefore m\leq -2$ 또는 $m\geq 1$ ······ ㉠

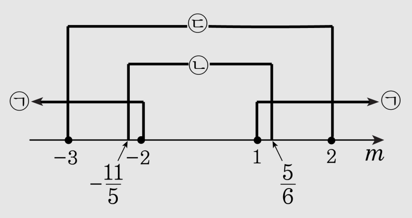
(ii) $f(-2)=5m+11>0$ 에서

$m>-\dfrac{11}{5}$,

$f(3)=6-5m>0$ 에서 $m<\dfrac{6}{5}$

$\therefore -\dfrac{11}{5}<m<\dfrac{6}{5}$ ······ ㉡

(iii) 대칭축의 위치



$-2<m+1<3$

$\therefore -3<m<2$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-\dfrac{11}{5}<m\leq -2$ 또는 $1\leq m<\dfrac{6}{5}$

따라서, 정수 m은 $-2,\ 1$두 개다.

9. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 근은 0과 2 사이에 있을 때 정수 $a,\ b$에 대하여, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x)=x^2+ax+b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1)=1-a+b>0 & \cdots ① \\ f(0)=b<0 & \cdots ② \\ f(2)=4+2a+b>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①$\times 2+$③하면 $6+3b>0$

$\therefore\ b>-2$

이것과 ②에서 $-2<b<0$

$\therefore\ b=-1$ ($\because\ b$는 정수)

이 값을 ①, ③에 대입하면

$1-a-1>0,\ 4+2a-1>0$

$\therefore\ -\frac{3}{2}<a<0$

$\therefore\ a=-1$ ($\because\ a$는 정수)

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ a+b=-2$

10. $|p| < 2$를 만족하는 모든 실수 p에 대하여 부등식 $x^2+px+1 > 2x+p$가 성립하도록 하는 x의 값의 범위는?

① $x \le -3$, $x = -1$, $x \ge 1$　　② $x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$

③ $x \le -3$, $x \ge 1$　　④ $x \le -1$, $x \ge 3$

⑤ $-3 \le x \le -1$

해설

$x^2 + px + 1 > 2x + p$, $(x-1)p + x^2 - 2x + 1 > 0$

$f(p) = (x-1)p + x^2 - 2x + 1$이라 하면, $f(p) > 0$이다.

$-2 < p < 2$에서 $f(p) > 0$이기 위한 조건은 $f(-2) \ge 0$ 이고 $f(2) \ge 0$ 이어야 한다.

$f(-2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 4x + 3 \ge 0$

$\therefore\ (x-1)(x-3) \ge 0$

$\therefore\ x \le 1$, $x \ge 3 \cdots\cdots$ ㉠

$f(2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 1 \ge 0$

$\therefore\ (x+1)(x-1) \ge 0$

$\therefore\ x \le -1$, $x \ge 1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\therefore\ x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$

그런데 $x = 1$ 일 때 $f(p) = 0 \cdot p + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ 이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

따라서 구하는 x값의 범위는 $x \le -1$, $x \ge 3$