1. 두 점 $\mathrm{A}(3,0)$, $\mathrm{B}(-2,0)$ 에서의 거리의 비가 $2:3$ 인 점 P 의 자취의 넓이는?

① 9π ② 16π ③ 25π ④ 36π ⑤ 49π

해설

점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(x,y)$ 라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{PB}}=2:3$

즉 $4\overline{\mathrm{PB}}^2=9\overline{\mathrm{PA}}^2$ 이므로

$4\left\{(x+2)^2+y^2\right\}=9\left\{(x-3)^2+y^2\right\}$

$x^2+y^2-14x+13=0$

$\therefore (x-7)^2+y^2=36$

따라서 점 P 는 중심이 $(7,\ 0)$ 이고,

반지름의 길이가 6 인 원 위를 움직이므로

구하는 자취의 넓이는 $\pi\cdot 6^2=36\pi$

2. 두 정점 $(0,\ 0)$, $(3,\ 0)$ 으로부터의 거리의 비가 $2\ :\ 1$ 인 점의 자취의 방정식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $(x-4)^2 + y^2 = 2^2$

해설

$A(0,\ 0)$, $B(3,\ 0)$ 으로 놓고, 조건을 만족하는 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 $\overline{AP}\ :\ \overline{BP} = 2\ :\ 1$

곧, $\overline{AP} = 2\overline{BP}$ $\quad \therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$

$\therefore\ x^2 + y^2 = 4\left\{(x-3)^2 + y^2\right\}$

$\therefore\ (x-4)^2 + y^2 = 2^2$

3. 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 이 $x^2+y^2=4$ 에 접할 때, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

접선이므로 원 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$\Rightarrow \dfrac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=2$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{4}$

4. 다음에서 원과 직선이 접하는 것은?

① $x^2 + y^2 = 4$, $x - y + 3 = 0$

② $x^2 + y^2 = 16$, $x - y + 5 = 0$

③ $x^2 + y^2 = 5$, $2x - y - 5 = 0$

④ $x^2 + y^2 = 3$, $x - 2y + 3 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 = 4$, $x + y - 2 = 0$

해설

① $(0,\ 0)$, $r = 2$, $d = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ d > r$

② $(0,\ 0)$, $r = 4$, $d = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ d < r$

③ $(0,\ 0)$, $r = \sqrt{5}$, $d = \sqrt{5}$

$\therefore\ r = d$

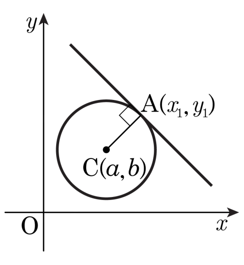
④ $(0,\ 0)$, $r = \sqrt{3}$, $d = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ r > d$

⑤ $(0,\ 0)$, $r = 2$, $d = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ r > d$

5. 다음은 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 위의 점 $A(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식이 $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$ 으로 나타내어짐을 보인 것이다. 이 때, (가) ~ (마) 에 알맞지 <u>않은</u> 것은?



> 점 A(x_1, y_1) 과 이 원의 중심 $C(a,b)$ 를 지나는 직선 CA 의 기울기는 (가) 이다.
> 그런데 점 A 에서의 접선은 직선 CA 와 수직이므로
> 점 A 에서의 접선의 방정식은
> $y-y_1=$ (나) $(x-x_1)$
> $\therefore (x_1-a)(x-x_1)+(y_1-b)(y-y_1)=0$
> 이 식을 변형하면
> $(x_1-a)(x-a+a-x_1)+$(다)$=0$
> $(x_1-a)(x-a)-(x_1-a)^2+(y_1-b)(y-b)-(y_1-b)^2=0$
> $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=$ (라) ⋯⋯㉠
> 한편, 점 A(x_1, y_1) 은
> 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위에 있으므로
> $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=$ (마) ⋯⋯㉡
> ㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은
> $(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

① (가): $\dfrac{y_1-b}{x_1-a}$

② (나): $-\dfrac{x_1-a}{y_1-b}$

③ (다): $(y_1-a)(y-a+a-y_1)$

④ (라): $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2$

⑤ (마): r^2

해설

③ (다): $(y_1-b)(y-b+b-y_1)$

6. 원 $(x+2)^2+(y-1)^2=10$ 위의 점 $(-3,\ 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$ 일 때, $3m+n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3,\ 4)$ 을 지나는 방정식 : $y=m(x+3)+4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

$\Rightarrow \dfrac{|m\times(-2)-1\times 1+3m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$

$\Rightarrow (m+3)^2=10m^2+10$

$\Rightarrow (3m-1)^2=0,\ m=\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{3}x+5 \Rightarrow 3m+n=6$

7. 두 점 A(3, 2), B(6, 5)에 대하여 $2\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$를 만족시키는 점을 P라 할 때, 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$2\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$에서 $4\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓으면

$4\{(x-3)^2+(y-2)^2\} = (x-6)^2+(y-5)^2$

$x^2+y^2-4x-2y-3=0$

$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=8$

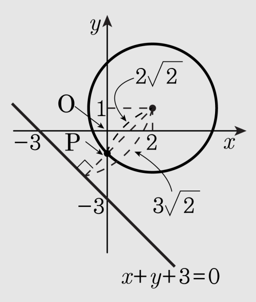
따라서 점 는 중심이 (2, 1)이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원 위를 움직인다.

이때, 원의 중심 (2, 1)과 직선 $x+y+3=0$

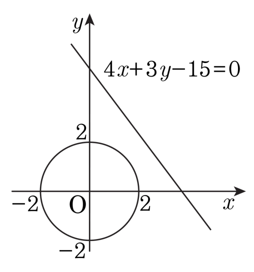
사이의 거리는 $\dfrac{|2+1+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$이므로

아래 그림에서 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은

$3\sqrt{2}-2\sqrt{2} = \sqrt{2}$



8. 다음 그림과 같이 원점이 중심이고 반지름의 길이가 2 인 원이 있다. 직선 $4x+3y-15=0$ 위의 한 점 P 에서 이 원까지의 최단거리는 ?



① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

직선 위의 한 점 P 에서 원까지의 최단거리는 원점에서 직선까지의 거리에서 원의 반지름의 길이를 뺀 것이다.

따라서 (최단거리) $= \dfrac{|0+0-15|}{\sqrt{4^2+3^2}} - 2$

$= \dfrac{15}{5} - 2 = 3 - 2 = 1$

9. 원 $x^2 + (y-4)^2 = 4$가 원 $(x-4)^2 + y^2 = 9$의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2　　② 3　　③ 5
④ $4\sqrt{2} - 5$　　⑤ $4\sqrt{2} - 6$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 4)$, $(4, 0)$이므로 중심거리는 $\sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$
두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $4\sqrt{2} - 2 - 3 = 4\sqrt{2} - 5$

10. 원 $x^2+(y-5)^2=4$가 원 $(x-5)^2+y^2=9$의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2　　② 3　　③ 5
④ $5\sqrt{2}-5$　　⑤ $5\sqrt{2}-13$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,5)$, $(5,0)$이므로 중심거리는 $\sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$
두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $5\sqrt{2}-2-3=5\sqrt{2}-5$

11. 원 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 과 함수 $y=\frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 $a,\ b,\ c\ ,d$ 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y=\frac{3}{2x}$ 을 $x^2+y^2=\frac{13}{4}$ 에 대입하면

$x^2+\frac{9}{4x^2}=\frac{13}{4}$

$x\neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$4x^4-13x^2+9=(x^2-1)(4x^2-9)=0$

$\therefore\ x=\pm 1,\ \pm\frac{3}{2}$

따라서 구하는 답은

$4\times(-1)\times 1\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}\times 4=9$

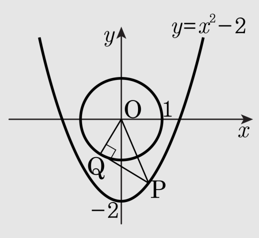
12. $y = x^2 - 2$ 위의 점 P에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때, 그 접점을 Q라고 하자. 선분 PQ의 길이의 최솟값은 ?

① 1　　② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　④ $\sqrt{2}$　　⑤ $\sqrt{3}$

해설

$\mathrm{P}(x,\ x^2-2)$, $\mathrm{O}(0,0)$ 라고 하면 $\triangle$OPQ는 직각삼각형이다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}^2 &= \overline{\mathrm{OP}}^2 - \overline{\mathrm{OQ}}^2 \\ &= x^2 + (x^2-2)^2 - 1 \\ &= x^4 - 3x^2 + 3 \\ &= \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\end{aligned}$$



$\overline{\mathrm{PQ}}^2$ 의 최솟값은 $x^2 = \dfrac{3}{2}$ 일 때, $\dfrac{3}{4}$ 이다.

따라서, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값은 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.