

1. 두 점 $A(3,0)$, $B(-2,0)$ 에서의 거리의 비가 $2:3$ 인 점 P 의 자취의 넓이는?

① 9π

② 16π

③ 25π

④ 36π

⑤ 49π

해설

점 P 의 좌표를 $P(x,y)$ 라 하면

$$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$$

$$\text{즉 } 4\overline{PB}^2 = 9\overline{PA}^2 \text{ 이므로}$$

$$4\{(x+2)^2 + y^2\} = 9\{(x-3)^2 + y^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 13 = 0$$

$$\therefore (x-7)^2 + y^2 = 36$$

따라서 점 P 는 중심이 $(7, 0)$ 이고,

반지름의 길이가 6인 원 위를 움직이므로

$$\text{구하는 자취의 넓이는 } \pi \cdot 6^2 = 36\pi$$

2. 두 점 $(0, 0)$, $(3, 0)$ 으로부터의 거리의
비가 $2 : 1$ 인 점의 자취의 방정식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $(x - 4)^2 + y^2 = 2^2$

해설

$A(0, 0)$, $B(3, 0)$ 으로 놓고, 조건을 만족하는 임의의 점을
 $P(x, y)$ 라 하면 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$$\text{곧, } \overline{AP} = 2\overline{BP} \quad \therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 4 \{ (x - 3)^2 + y^2 \}$$

$$\therefore (x - 4)^2 + y^2 = 2^2$$

3. 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 이 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접할 때, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 은?

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

접선이므로 원 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{4}$$

4. 다음에서 원과 직선이 접하는 것은?

① $x^2 + y^2 = 4$, $x - y + 3 = 0$

② $x^2 + y^2 = 16$, $x - y + 5 = 0$

③ $x^2 + y^2 = 5$, $2x - y - 5 = 0$

④ $x^2 + y^2 = 3$, $x - 2y + 3 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 = 4$, $x + y - 2 = 0$

해설

① $(0, 0)$, $r = 2$, $d = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\therefore d > r$

② $(0, 0)$, $r = 4$, $d = \frac{5}{\sqrt{2}}$

$\therefore d < r$

③ $(0, 0)$, $r = \sqrt{5}$, $d = \sqrt{5}$

$\therefore r = d$

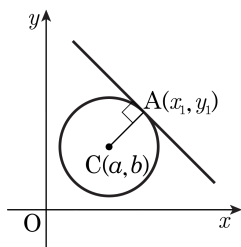
④ $(0, 0)$, $r = \sqrt{3}$, $d = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$\therefore r > d$

⑤ $(0, 0)$, $r = 2$, $d = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$\therefore r > d$

5. 다음은 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 위의 점 $A(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식이 $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$ 으로 나타내어짐을 보인 것이다. 이 때, (가) ~ (마)에 알맞지 않은 것은?



점 $A(x_1, y_1)$ 과 이 원의 중심 $C(a, b)$ 를 지나는 직선 CA 의 기울기는 (가) 이다.

그런데 점 A 에서의 접선은 직선 CA 와 수직이므로 점 A 에서의 접선의 방정식은

$$y - y_1 = (\text{나}) (x - x_1)$$

$$\therefore (x_1 - a)(x - x_1) + (y_1 - b)(y - y_1) = 0$$

이 식을 변형하면

$$(x_1 - a)(x - a + a - x_1) + (\text{다}) = 0$$

$$(x_1 - a)(x - a) - (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)(y - b) - (y_1 - b)^2 = 0$$

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = (\text{라}) \dots\dots \text{㉠}$$

한편, 점 $A(x_1, y_1)$ 은

$$\text{원 } (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \text{ 위에 있으므로}$$

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = (\text{마}) \dots\dots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

① (가): $\frac{y_1 - b}{x_1 - a}$

② (나): $-\frac{x_1 - a}{y_1 - b}$

③ (다): $(y_1 - a)(y - a + a - y_1)$

④ (라): $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2$

⑤ (마): r^2

해설

③ (다): $(y_1 - b)(y - b + b - y_1)$

6. 원 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 4)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = mx + n$ 일 때, $3m + n$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$(-3, 4)$ 을 지나는 방정식 : $y = m(x+3) + 4$
원에 접하므로 원 중심에서 직선까지 거리는
반지름과 같다.

$$\Rightarrow \frac{|m \times (-2) - 1 \times 1 + 3m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow (m+3)^2 = 10m^2 + 10$$

$$\Rightarrow (3m-1)^2 = 0, m = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = \frac{1}{3}x + 5 \Rightarrow 3m + n = 6$$

7. 두 점 A(3, 2), B(6, 5)에 대하여 $2\overline{AP} = \overline{BP}$ 를 만족시키는 점을 P라 할 때, 점 P와 직선 $x + y + 3 = 0$ 사이의 거리의 최솟값은?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ $2\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{3}$

⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$$2\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } 4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y) 로 놓으면

$$4\{(x-3)^2 + (y-2)^2\} = (x-6)^2 + (y-5)^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$$

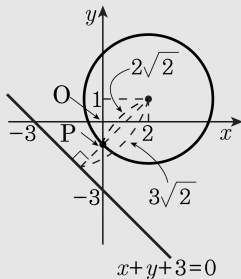
$$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

따라서 점 P는 중심이 $(2, 1)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원위를 움직인다.

이때, 원의 중심 $(2, 1)$ 과 직선 $x + y + 3 = 0$

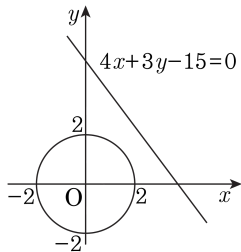
$$\text{사이의 거리는 } \frac{|2 + 1 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$\text{아래 그림에서 점 P와 직선 } x + y + 3 = 0 \text{ 사이의 거리의 최솟값은 } 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$



8. 다음 그림과 같이 원점이 중심이고 반지름의 길이가 2 인 원이 있다. 직선 $4x+3y-15=0$ 위의 한 점 P 에서 이 원까지의 최단거리는 ?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

직선 위의 한 점 P 에서 원까지의 최단거리는 원점에서 직선까지의 거리에서 원의 반지름의 길이를 뺀 것이다.

$$\begin{aligned} \text{따라서 (최단거리)} &= \frac{|0 + 0 - 15|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} - 2 \\ &= \frac{15}{5} - 2 = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

9. 원 $x^2 + (y - 4)^2 = 4$ 가 원 $(x - 4)^2 + y^2 = 9$ 의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2

② 3

③ 5

④ $4\sqrt{2} - 5$

⑤ $4\sqrt{2} - 6$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 4)$, $(4, 0)$ 이므로 중심거리는

$$\sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

두 원의 반지름은 각각 2, 3 이므로 두 원의 최단거리는 $4\sqrt{2} -$

$$2 - 3 = 4\sqrt{2} - 5$$

10. 원 $x^2 + (y - 5)^2 = 4$ 가 원 $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ 의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2

② 3

③ 5

④ $5\sqrt{2} - 5$

⑤ $5\sqrt{2} - 13$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 5)$, $(5, 0)$ 이므로 중심거리는

$$\sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$$

두 원의 반지름은 각각 2, 3 이므로 두 원의 최단거리는 $5\sqrt{2} -$

$$2 - 3 = 5\sqrt{2} - 5$$

11. 원 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 과 함수 $y = \frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 a, b, c, d 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y = \frac{3}{2x}$ 을 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 에 대입하면

$$x^2 + \frac{9}{4x^2} = \frac{13}{4}$$

$x \neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$$4x^4 - 13x^2 + 9 = (x^2 - 1)(4x^2 - 9) = 0$$

$$\therefore x = \pm 1, \pm \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 답은

$$4 \times (-1) \times 1 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \times 4 = 9$$

12. $y = x^2 - 2$ 위의 점 P에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때, 그 접점을 Q라고 하자. 선분 PQ의 길이의 최솟값은 ?

- ① 1 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$P(x, x^2 - 2)$, $O(0, 0)$ 라고 하면 $\triangle OPQ$ 는 직각삼각형이다.

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2 \\ &= x^2 + (x^2 - 2)^2 - 1 \\ &= x^4 - 3x^2 + 3 \\ &= \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$\overline{PQ}^2$ 의 최솟값은 $x^2 = \frac{3}{2}$ 일 때, $\frac{3}{4}$ 이다.

따라서, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

