

1. $a(x^2 - 2x + 2) > 2x$ 을 만족하는 x 가 존재하지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $a \leq 1 - \sqrt{2}$ ② $a \leq 1$ ③ $a \leq 1 + \sqrt{2}$
④ $0 < a \leq 1$ ⑤ $0 < a \leq \sqrt{2}$

해설

모든 실수 x 에서 $ax^2 - 2(a+1)x + 2a \leq 0$

i) $a \leq 0$

ii) $D/4 = (a+1)^2 - 2a^2 = -a^2 + 2a + 1 \leq 0$

$a^2 - 2a - 1 \geq 0$

$\therefore a \leq 1 - \sqrt{2}$ 또는 $a \geq 1 + \sqrt{2}$

$\therefore a \leq 1 - \sqrt{2}$

2. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $kx^2 - 2(k-4)x + 2 \geq 0$ 이 성립하도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?
- ① $k \leq -2$ ② $-1 \leq k \leq 2$ ③ $1 \leq k \leq 8$
④ $2 \leq k \leq 8$ ⑤ $k \leq 8$

해설

x^2 의 계수가 미지수 k 이므로
i) $k = 0$ 일 때 $8x + 2 \geq 0$ 에서 $x \geq -\frac{1}{4}$ 이므로
모든 실수 x 에 대하여 성립하는 것은 아니다.
ii) $k \neq 0$ 일 때 $kx^2 - 2(k-4)x + 2 \geq 0$ 의 해가 모든 실수이려면
 $k > 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\frac{D}{4} = (k-4)^2 - 2k \leq 0, k^2 - 10k + 16 \leq 0,$
 $(k-2)(k-8) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq k \leq 8 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통 범위를 구하면 $2 \leq k \leq 8$
i), ii)에서 $2 \leq k \leq 8$ 이다.

3. 두 직선 $3x - 2y - 4 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$ 의 교점과 점 $(1, -4)$ 를 지나는 직선의 방정식은?

① $5x - y - 9 = 0$

② $5x + y - 9 = 0$

③ $x - 2y - 1 = 0$

④ $2x - 3y - 1 = 0$

⑤ $2x - y + 3 = 0$

해설

$$\begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \cdots \textcircled{1} \\ x + 2y - 4 = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} : x = 2, y = 1$$

$$\therefore \text{교점} : (2, 1)$$

$$\therefore \text{구하는 직선은 } y - 1 = \frac{-4 - 1}{1 - 2}(x - 2) = 5(x - 2)$$

$$\therefore 5x - y - 9 = 0$$

4. 두 직선 $y = 3x + 2$, $y = 4x - 1$ 의 교점을 지나는 직선 중 x 절편과 y 절편이 같은 직선을 구하면?

① $x + y - 14 = 0$

② $-x + y - 14 = 0$

③ $x - y - 14 = 0$

④ $x + y + 14 = 0$

⑤ $-x + y + 14 = 0$

해설

두 직선 $y = 3x + 2$, $y = 4x - 1$ 의

교점을 지나는 직선은

$$(3x - y + 2) \cdot m + (4x - y - 1) = 0$$

(m 은 상수) 로 나타낼 수 있다.

$$\therefore (3m + 4)x - (m + 1)y + (2m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3m + 4}{m + 1}x + \frac{2m - 1}{m + 1}$$

x 절편과 y 절편이 같으므로

이 직선의 기울기는 -1 이다.

$$\text{따라서, } \frac{3m + 4}{m + 1} = -1$$

$$\therefore m = -\frac{5}{4}$$

따라서, 구하는 직선의 방정식은 $x + y - 14 = 0$

(별해)

두 직선의 교점을 구하면 $3x + 2 = 4x - 1$ 에서

$$x = 3, y = 11$$

x 절편, y 절편이 같으면 기울기가 -1 이므로

$$y - 11 = -1(x - 3)$$

$$\text{따라서, } y = -x + 14$$

5. 정수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g 가 다음 성질을 만족시킨다.

I . $f(0) = 2, f(1) = 6$
II . $g(n) = f(n + 1)$
III . $f(n) = 2 \{ g(n + 1) - g(n - 1) \}$

이 때, $f(5)$ 의 값은?

- ① $\frac{27}{2}$ ② $\frac{25}{2}$ ③ $\frac{23}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

해설

II . 예서 $g(n + 1) = f(n + 2), g(n - 1) = f(n)$
III . 예서 $f(n) = 2 \{ f(n + 2) - f(n) \}$
 $\therefore 3f(n) = 2f(n + 2)$
 $f(n + 2) = \frac{3}{2}f(n)$
 $f(3) = \frac{3}{2}f(1) = \frac{3}{2} \times 6 = 9$
 $f(5) = \frac{3}{2}f(3) = \frac{3}{2} \times 9 = \frac{27}{2}$

6. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $f(x) = x^3 - 2x + 2$, $g(x+2) = f(x+1)$ 로 정의될 때, $g(0)$ 의 값은?

① 3 ② 2 ③ 1 ④ 0 ⑤ -1

해설

$g(x+2) = f(x+1)$ 에서 $g(0)$ 은 $x = -2$ 에서의 값이므로 $f(-1)$ 이다.
따라서 $g(0) = f(-1) = 3$

7. 다음의 윗줄은 자연수, 아랫줄은 정수이다. 이 도식이 의미하는 뜻과 가장 가까운 것은?

자연수; $\cdots$	6,	4,	2,	1,	3,	5,	7,	$\cdots$
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
정수; $\cdots$	-3,	-2,	-1,	0,	1,	2,	3,	$\cdots$

- ① 정수는 무한히 많다.
- ② 자연수는 무한히 많다.
- ③ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일함수가 존재할 수 없다.
- ④ 자연수 집합과 정수 집합 사이에는 일대일대응이 존재한다.
- ⑤ 정수의 개수가 자연수의 개수보다 많다.

해설

문제의 대응은 자연수의 집합과 정수의 집합 사이에 서로 모자라는 것도 없고 남는 것도 없으며 2번씩 대응되는 것도 없는 대응, 즉 일대일 대응임을 알 수 있다.

8. $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y \mid -2 \leq y \leq 2\}$ 에서 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = ax + b (a > 0)$ 로 정의되는 함수 f 가 일대일대응일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

- ① -2 ② 2 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ -1

해설

일대일 대응이고 $a > 0$ 이므로

$$f(-1) = -2 \quad f(2) = 2$$

$$\therefore -a + b = -2, \quad 2a + b = 2$$

$$\Rightarrow a = \frac{4}{3} \quad b = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = -2$$

9. 실수 a, b, c 에 대하여 $[a, b, c] = a^2 + bc$ 라 하고 $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ 일 때, $[x, 2y, z] + [y, 2z, x] + [z, 2x, y]$ 의 값은?

① 10 ② 22 ③ 88 ④ 100 ⑤ 144

해설

$$\begin{aligned} & [x, 2y, z] + [y, 2z, x] + [z, 2x, y] \\ &= x^2 + 2yz + y^2 + 2zx + z^2 + 2xy \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \\ &= (x + y + z)^2 = 100 \end{aligned}$$

10. $a + b + c = 0$ 일 때, 다음 중 $2a^2 + bc$ 와 같은 것은?

① $(a - c)^2$

② $(b + c)^2$

③ $(a + b)(b + c)$

④ $(a - b)(a - c)$

⑤ $(a - b)(a + c)$

해설

$$\begin{aligned} 2a^2 + bc &= 2a^2 - b(a + b) \quad (\because c = -a - b) \\ &= 2a^2 - ab - b^2 \\ &= (a - b)(2a + b) \\ &= (a - b)(a + b + a) \\ &= (a - b)(a - c) \quad (\because a + b = -c) \end{aligned}$$

11. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 소수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 미만의 소수}\}$ 에 대하여 $B \subset X \subset A$ 를 만족하는 X 의 개수를 모두 구하면?

① 16개 ② 20개 ③ 24개 ④ 28개 ⑤ 32개

해설

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, $B = \{2, 3, 5\}$

집합 X 는 원소 2와 3, 5를 포함하는 집합 A 의 부분집합이므로
부분집합의 개수는

$2^{8-3} = 2^5 = 32$ (개)이다.

12. 두 집합 $A = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이상 } 15 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 12 \text{ 이상 } 18 \text{ 미만의 } 3 \text{의 배수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

조건

$$X \subset A, \quad B \subset X, \quad n(X) = 4$$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
 $B = \{12, 15\}$
 $X \subset A, B \subset X$ 이므로 $B \subset X \subset A$
 $\{12, 15\} \subset X \subset \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 12, 15는 반드시 포함하고 원소의 개수가 4개인 집합이므로
 $\{10, 11, 12, 15\}, \{10, 12, 13, 15\},$
 $\{10, 12, 14, 15\}, \{11, 12, 13, 15\},$
 $\{11, 12, 14, 15\}, \{12, 13, 14, 15\}$ 의 6개이다.

13. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 세 조건 p, q, r 이 다음과 같다.

$$p : (A - B) \cup (B - A) = \emptyset$$
$$q : A = B$$
$$r : A \cup B = B$$

이 때, 조건 p 는 조건 q 이기 위한 $\textcircled{\tiny 1}$ 조건이고, 조건 q 는 조건 r 이기 위한 $\textcircled{\tiny 2}$ 조건이다. $\textcircled{\tiny 1}, \textcircled{\tiny 2}$ 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

- ① 필요, 충분

② 필요충분, 필요

③ 필요, 필요

④ 필요충분, 충분

⑤ 충분, 필요

해설

$$(A - B) \cup (B - A) = \emptyset \Leftrightarrow A - B = \emptyset, B - A = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B, B \subset A$$
$$\Leftrightarrow A = B \therefore p \Leftrightarrow q \text{ 이므로}$$

$\textcircled{\tiny 1}$: 필요충분조건

$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$ 이고 $A = B \Rightarrow A \subset B$ (역은 성립하지 않는다.)

$\therefore q \Rightarrow r$ 이므로 $\textcircled{\tiny 2}$: 충분조건

14. 다음 중 틀린 것은?

- ① $a^2 + b^2 = 0$ 은 $a = b = 0$ 이기 위한 필요조건이다.
- ② $xy \leq 1$ 또는 $x + y \leq 2$ 는 $x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 이기 위한 필요충분조건이다.
- ③ $x = 3$ 은 $x^2 - x - 6 = 0$ 이기 위한 충분조건이다.
- ④ a, b, c 가 실수일 때, $ac = bc$ 는 $a = b$ 이기 위한 필요조건이다.
- ⑤ $x + y$ 가 유리수인 것은 x, y 모두가 유리수이기 위한 필요조건이다.

해설

① $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ (필요충분조건)
※ 이 경우 필요충분조건이 된다는 것은 서로가 서로에게 충분조건도 되고 필요조건도 되는 것이므로 틀린 것이 아니다.
② 대우: $x > 1, y > 1 \Rightarrow xy > 1, x + y > 2$ (참)
이: $xy > 1, x + y > 2 \nRightarrow x > 1, y > 1$ (거짓) (반례: $x = 10, y = 0.5$)
대우가 참, 이가 거짓이므로 주어진 명제는 참이고 그 역은 거짓이다.
∴ 충분조건

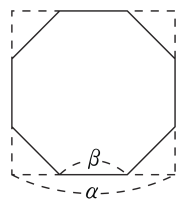
15. 실수를 계수로 갖는 이차방정식 $x^2 - (m-1)x + (m+1) = 0$ 이 허근 α 를 갖고, α^3 이 실수일 때, m 의 값은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 3
- ④ 0, 3
- ⑤ 0, 1, 3

해설

α^3 이 실수이므로 $\bar{\alpha}^3 = \alpha^3$,
 $(\alpha - \bar{\alpha})(\alpha^2 + \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2) = 0$
 α 는 허수이므로 $\alpha \neq \bar{\alpha}$
 $\therefore \alpha^2 + \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 = 0 \dots\dots (i)$
근과 계수와의 관계에서
 $\alpha + \bar{\alpha} = m - 1, \alpha\bar{\alpha} = m + 1$
(i)은 $(\alpha + \bar{\alpha})^2 - \alpha\bar{\alpha} = 0, (m - 1)^2 - (m + 1) = 0$
 $m^2 - 3m = m(m - 3) = 0$
 $\therefore m = 0, 3$
이차방정식 $x^2 - (m - 1)x + (m + 1) = 0$ 이
허근을 가지므로 $D = (m - 1)^2 - 4(m + 1) < 0$
 $m = 0, 3$ 은 이 부등식을 만족시키므로 구하는 답이 된다.

16. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 α 인 정사각형의 네 귀퉁이를 잘라 정8각형을 만들고 그 한 변의 길이를 β 라 하면, α, β 는 이차방정식 $x^2 + px + (\sqrt{2} + 1) = 0$ 의 두 근이 된다고 한다. 다음 중 α, p 의 값으로 옳은 것은?



- ① $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = \sqrt{2} - 1$
 ② $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$
 ③ $\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad p = -\sqrt{2}$
 ④ $\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad p = -\sqrt{2} - 2$
 ⑤ $\alpha = \sqrt{2} - 1, \quad p = -\sqrt{2} - 1$

해설

잘라낸 귀퉁이는 빗변의 길이가 β 인 직각이등변삼각형이므로 다른 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}\beta$ 이다.

$$2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\beta + \beta = \alpha \text{ 이므로}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)\alpha$$

α, β 는 $x^2 + px + (\sqrt{2} + 1) = 0$ 의 두 근이므로

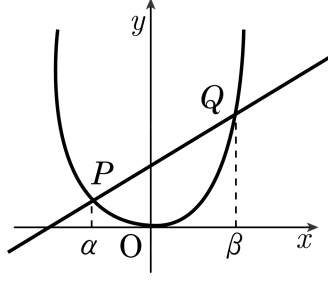
$$\alpha\beta = (\sqrt{2} - 1)\alpha^2 = \sqrt{2} + 1 \text{ 에서}$$

$$\alpha^2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$\alpha > 0 \text{ 이므로 } \alpha = \sqrt{2} + 1$$

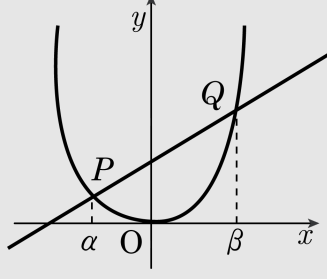
$$\therefore p = -(\alpha + \beta) = -\{\alpha + (\sqrt{2} - 1)\alpha\} = -\sqrt{2} - 2$$

17. 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = m(x + 3)$ 이 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만나고 원점을 연결한 선분 OP 와 OQ 가 수직이 될 때, m 의 값은?



- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설



교점 P, Q 의 좌표는

$x^2 = m(x + 3)$, $x^2 - mx - 3m = 0$ 의 두 근이므로

두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = m, \alpha\beta = -3m$

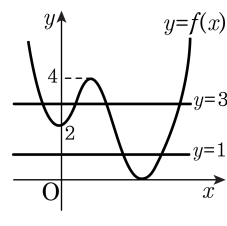
$\overline{OP}$ 의 기울기 : $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, $\overline{OQ}$ 의 기울기 : $\frac{\beta^2}{\beta} = \beta$

두 직선이 수직이므로 $\alpha\beta = -1, -3m = -1$

$\therefore m = \frac{1}{3}$

18. 사차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 방정식 $\{f(x)\}^2 = 4f(x) - 3$ 의 실근의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 4개 ⑤ 6개



해설

$\{f(x)\}^2 = 4f(x) - 3$ 을 인수분해하면
 $\{f(x) - 1\} \{f(x) - 3\} = 0$
 $\therefore f(x) = 1$ 또는 $f(x) = 3$
따라서, 위의 그래프와 같이
 $f(x) = 1$ 과 $f(x) = 3$ 을 만족하는 x 는
각각 2개와 4개이므로 실근의 개수는 6개이다.

19. 세 개의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ 이 오직 하나의 공통 실근 α 를 가질 때, $a+b+c+\alpha$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

공통 실근을 α 라 하면

$$\begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \cdots ① \\ b\alpha^2 + c\alpha + a = 0 \cdots ② \\ c\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots ③ \end{cases}$$

$$① + ② + ③ : (a+b+c)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

α 가 실수일 때 $\alpha^2 + \alpha + 1 > 0$

$$\therefore a+b+c=0$$

$$① \times \alpha - ② : a(\alpha^3 - 1) = 0,$$

$a \neq 0$ 이고 α 는 실수이므로 $\alpha = 1$

$$\therefore a+b+c+\alpha = 1$$

20. 두 개의 이차방정식 $x^2 + ax + \frac{1}{a} = 0$ 과 $x^2 + bx + \frac{1}{b} = 0$ 이 공통근을 가질 때, $ab(a+b)$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ a, b 의 값에 따라 달라진다.

해설

공통근을 α 라 하고 두 식에 대입하면

$$\alpha^2 + a\alpha + \frac{1}{a} = 0 \dots\dots ①$$

$$\alpha^2 + b\alpha + \frac{1}{b} = 0 \dots\dots ②$$

① - ②하면

$$\therefore \alpha(a-b) + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0, (a-b)\left(\alpha - \frac{1}{ab}\right) = 0$$

$$a \neq b \text{이므로 } \alpha = \frac{1}{ab}$$

$$\text{이것을 ①에 대입하면 } \left(\frac{1}{ab}\right)^2 + a \cdot \frac{1}{ab} + \frac{1}{a} = 0$$

$$1 + a^2b + ab^2 = 1 + ab(a+b) = 0$$

$$\therefore ab(a+b) = -1$$