

1. 이차부등식 $ax^2 + 4x + a < 0$ 이 임의의 실수 x 에 대하여 성립할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$

② $a < 0$

③ $a < 2$

④ $a < 4$

⑤ $a < 8$

해설

$ax^2 + 4x + a < 0$ 이 임의의 실수 x 에 대하여 성립하려면

i) $a < 0$

ii) $ax^2 + 4x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$$\frac{D}{4} = 2^2 - a^2 < 0$$

$$a^2 - 4 > 0, (a + 2)(a - 2) > 0$$

$$\therefore a < -2 \text{ 또는 } a > 2$$

i), ii)의 공통 범위를 구하면 $a < -2$

2. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + ax + a$ 가 -3 보다 항상 크기 위한 상수 a 의 값의 범위는?

① $-4 < a < 3$

② $-2 < a < 4$

③ $-2 < a < 6$

④ $2 < a < 4$

⑤ $2 < a < 6$

해설

$$x^2 + ax + a > -3, x^2 + ax + (a + 3) > 0$$

모든 실수 x 에 대하여 성립하려면

이차방정식 $x^2 + ax + (a + 3) = 0$ 의 판별식을

D 라 할 때,

$D < 0$ 이어야 하므로

$$D = a^2 - 4(a + 3) < 0$$

$$a^2 - 4a - 12 < 0, (a - 6)(a + 2) < 0$$

$$\therefore -2 < a < 6$$

3. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $(x-3)^2 + (y+4)^2 = r^2$ 의 공통접선이 모두 4 개가 되도록 하는 자연수 r 의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

두 원의 공통접선이 4 개가 되려면 두 원의 위치 관계는 서로 다른 원의 외부에 있어야 한다.

이 때, $x^2 + y^2 = 1$ 은 중심이 $(0, 0)$,

반지름의 길이가 1 인 원이고

$(x-3)^2 + (y+4)^2 = r^2$ 은 중심이 $(3, -4)$,

반지름의 길이가 r 인 원이므로

$$\sqrt{3^2 + (-4)^2} > 1 + r$$

$$5 > 1 + r$$

$$\therefore 0 < r < 4$$

따라서, 자연수 r 은 1, 2, 3 으로 모두 3 개이다.

4. 두 원 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 36$ 의 공통외접선의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 0개

해설

두 원의 중심거리는

$$\sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20}$$

두 원의 반지름의 길이의 합이 8, 차가 4로

$4 < \sqrt{20} < 8$ 이므로

두 원은 서로 두 점에서 만난다.

따라서 공통외접선 2개를 가진다.

5. 집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 $A - (B - C)$ 와 같은 집합은?

① $(A - B) - (A - C)$

② $(A - B) \cap (A - C)$

③ $(A - B) \cup (A - C^c)$

④ $(A \cap B) \cup (A - C)$

⑤ $(A \cup B) - (A \cup C)$

해설

$$\begin{aligned} A - (B - C) &= A \cap (B - C)^c \\ &= A \cap (B \cap C^c)^c \\ &= A \cap (B^c \cup (C^c)^c) \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap (C^c)^c) \\ &= (A - B) \cup (A - C^c) \end{aligned}$$

6. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(A^c)^c = A$

㉡ $A \cup A^c = U$

㉢ $A \cap A^c = \emptyset$

㉣ $(A \cup B) \subset B$

㉤ $U^c = \emptyset$

① ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

② ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

③ ㉠, ㉡, ㉤

④ ㉠, ㉤

⑤ ㉤

해설

㉣ $B \subset (A \cup B)$

7. 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 일차함수 $f(x) = ax + b$ 의 정의역과 치역이 일치할 때, 두 실수 a 와 b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 1

해설

1) $a > 0$ 일 때 $f(-1) = -1$, $f(3) = 3$ 을 만족

$$-a + b = -1, 3a + b = 3$$

따라서 $a = 1$, $b = 0$

2) $a < 0$ 일 때 $f(-1) = 3$, $f(3) = -1$

$$-a + b = 3, 3a + b = -1$$

따라서 $a = -1$, $b = 2$

1), 2)에서 $a > 0$ 일 때 $a + b = 1 + 0 = 1$

$$a < 0 \text{일 때 } a + b = -1 + 2 = 1$$

즉 $a + b = 1$

8. $f(2x-1) = \frac{x-5}{x-1}$ 일 때, $f(-1)$ 의 값을 구하면?

① 5

② $\frac{7}{2}$

③ 0

④ -5

⑤ -7

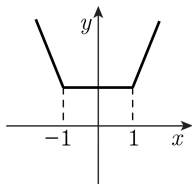
해설

$$2x - 1 = -1 \text{ 에서 } x = 0$$

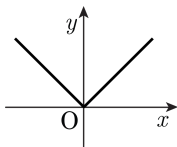
$$\therefore f(-1) = 5$$

9. 다음 중 함수 $y = |x - 1| + x + |x + 1|$ 의 그래프는?

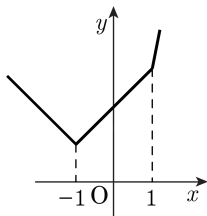
①



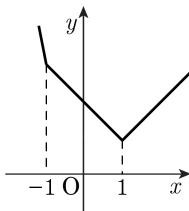
②



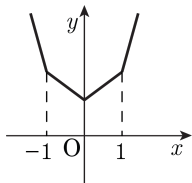
③



④



⑤



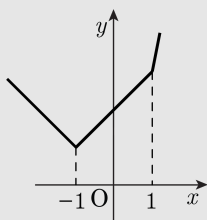
해설

$$\begin{aligned} \text{i) } x \leq -1 \text{ 일 때, } y &= |x - 1| + x + |x + 1| \\ &= -(x - 1) + x - (x + 1) \\ &= -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } -1 < x \leq 1 \text{ 일 때 } y &= |x - 1| + x + |x + 1| \\ &= -(x - 1) + x + (x + 1) \\ &= x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } 1 < x \text{ 일 때 } y &= |x - 1| + x + |x + 1| \\ &= (x - 1) + x + (x + 1) \\ &= 3x \end{aligned}$$

i), ii), iii) 에 의하여 주어진 함수의 그래프는



10. $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y = 2|x - 1| + x$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, 상수 M, m 의 합 $M + m$ 의 값은?

① 9

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 5

해설

$y = 2|x - 1| + x$ 에서

(i) $x \geq 1$ 일 때, $y = 2x - 2 + x = 3x - 2$

(ii) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x - 1) + x = -x + 2$ 이므로

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $y = 2|x - 1| + x$

따라서 $x = 3$ 일 때, 최댓값 7, $x = 1$ 일 때 최솟값 1 을 가지므로

$$M + m = 7 + 1 = 8$$

11. 다음 중 틀린 것은?

- ① $a^2 + b^2 = 0$ 은 $a = b = 0$ 이기 위한 필요조건이다.
- ② $xy \leq 1$ 또는 $x + y \leq 2$ 는 $x \leq 1$ 또는 $y \leq 1$ 이기 위한 필요충분조건이다.
- ③ $x = 3$ 은 $x^2 - x - 6 = 0$ 이기 위한 충분조건이다.
- ④ a, b, c 가 실수일 때, $ac = bc$ 는 $a = b$ 이기 위한 필요조건이다.
- ⑤ $x + y$ 가 유리수인 것은 x, y 모두가 유리수이기 위한 필요조건이다.

해설

① $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ (필요충분조건)

※ 이 경우 필요충분조건이 된다는 것은 서로가 서로에게 충분조건도 되고 필요조건도 되는 것이므로 틀린 것이 아니다.

② 대우: $x > 1, y > 1 \Rightarrow xy > 1, x + y > 2$ (참)

이: $xy > 1, x + y > 2 \nRightarrow x > 1, y > 1$ (거짓) (반례: $x = 10, y = 0.5$)

대우가 참, 이가 거짓이므로 주어진 명제는 참이고 그 역은 거짓이다.

∴ 충분조건

12. 다음 중 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = B \cap A^c$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은? (단, A^c 는 전체집합 U 에 대한 A 의 여집합)

① $A = B$

② $B \subset A$

③ $A \subset B$

④ $A \cap B = \emptyset$

⑤ $A \cup B = \emptyset$

해설

$$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A - B) \cup (B - A)$$

따라서 $(A - B) \cup (B - A) = B \cap A^c$ 에서 $(A - B) \cup (B - A) = B - A$ 가 성립하려면 $(A - B) \subset (B - A)$ 이어야 하는데 $A - B$ 와 $B - A$ 는 서로소이므로 $A - B = \emptyset \therefore A \subset B$

13. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $x - 3$ 으로 나눌 때의 나머지는 5이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 3)$ 으로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $\frac{1}{2}(x^2 + 1)$

② $\frac{1}{3}(x^2 + 1)$

③ $\frac{1}{5}(x^2 + 1)$

④ $2x^2 - 3x + 1$

⑤ $\frac{2}{3}x^2 - x + \frac{1}{2}$

해설

$$f(x) = (x^2 + 1)Q_1(x)$$

$$f(x) = (x - 3)Q_2(x) + 5$$

$$\therefore f(3) = 5$$

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 3)Q_3(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x^2 + 1)(x - 3)Q_3(x) + a(x^2 + 1)$$

($\because f(x)$ 는 $x^2 + 1$ 로 나누어 떨어지므로)

$$= (x^2 + 1)\{(x - 3)Q_3(x) + a\}$$

$$x = 3 \text{을 대입하면 } f(3) = 10a = 5$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \text{이고 나머지는 } \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

14. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이고, $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나눌 때, 나머지의 상수항은?

① 4

② 3

③ 2

④ 1

⑤ 0

해설

$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)g(x) + ax^2 + bx + c$ 로 두면 $x^2 + 1$ 로 나누었을 때의 나머지가 $x + 1$ 이므로

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + bx + c - a \text{에서}$$

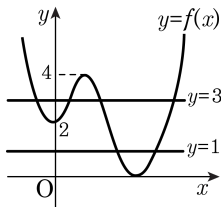
$$bx + c - a = x + 1$$

$$\therefore b = 1, c - a = 1$$

또, $f(1) = a + b + c = 4$ 이므로

$$c - 1 + 1 + c = 4 \text{에서 } c = 2$$

15. 사차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 방정식 $\{f(x)\}^2 = 4f(x) - 3$ 의 실근의 개수는?



- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
④ 4 개 ⑤ 6 개

해설

$\{f(x)\}^2 = 4f(x) - 3$ 을 인수분해하면

$$\{f(x) - 1\} \{f(x) - 3\} = 0$$

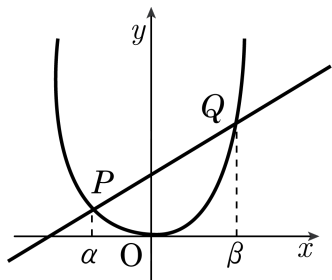
$$\therefore f(x) = 1 \text{ 또는 } f(x) = 3$$

따라서, 위의 그래프와 같이

$f(x) = 1$ 과 $f(x) = 3$ 을 만족하는 x 는

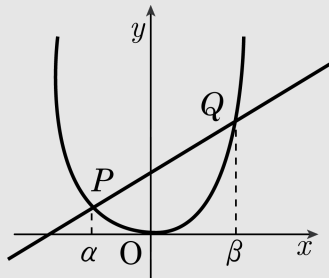
각각 2 개와 4 개이므로 실근의 개수는 6 개이다.

16. 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = m(x + 3)$ 이 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만나고 원점을 연결한 선분 OP 와 OQ 가 수직이 될 때, m 의 값은?



- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설



교점 P, Q 의 좌표는

$x^2 = m(x + 3)$, $x^2 - mx - 3m = 0$ 의 두 근이므로
두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = m$, $\alpha\beta = -3m$

$\overline{OP}$ 의 기울기 : $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, $\overline{OQ}$ 의 기울기 : $\frac{\beta^2}{\beta} = \beta$

두 직선이 수직이므로 $\alpha\beta = -1$, $-3m = -1$

$$\therefore m = \frac{1}{3}$$

17. 두 개의 이차방정식 $x^2 + ax + \frac{1}{a} = 0$ 과 $x^2 + bx + \frac{1}{b} = 0$ 이 공통근을 가질 때, $ab(a+b)$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ a, b 의 값에 따라 달라진다.

해설

공통근을 α 라 하고 두 식에 대입하면

$$\alpha^2 + a\alpha + \frac{1}{a} = 0 \dots\dots ①$$

$$\alpha^2 + b\alpha + \frac{1}{b} = 0 \dots\dots ②$$

① - ②하면

$$\therefore \alpha(a-b) + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0, (a-b) \left(\alpha - \frac{1}{ab} \right) = 0$$

$$a \neq b \text{ 이므로 } \alpha = \frac{1}{ab}$$

$$\text{이것을 ①에 대입하면 } \left(\frac{1}{ab} \right)^2 + a \cdot \frac{1}{ab} + \frac{1}{a} = 0$$

$$1 + a^2b + ab^2 = 1 + ab(a+b) = 0$$

$$\therefore ab(a+b) = -1$$

18. 두 이차방정식 $x^2 + ax + 2b = 0$, $x^2 + bx + 2a = 0$ 이 공통근을 가질 경우에 대한 다음 설명 중 옳은 것으로만 짝지어진 것은? (단, 중근은 1개의 근으로 본다.)

(가) $a = 0$ 이면 두 개의 공통근을 갖는다.

(나) $a + b = -2$ 이면 오직 한 개의 공통근을 갖는다.

(다) $a = b$ 이거나 $a + b = -2$ 이면 적어도 한 개의 공통근을 갖는다.

(라) $a + b = -2$ 이고 $a \neq -1$ 이면 오직 한 개의 공통근을 갖는다.

① (가), (나), (다)

② (가), (나)

③ (다)

④ (다), (라)

⑤ (라)

해설

(가) $a = 0$ 일 경우 공통근은 하나뿐

(나) $a = -1$, $b = -1$ 일 경우 $x = -1, 2$ 의 두 개의 공통근을 갖는다.

(다) $a = b$ 이면 두 이차방정식이 같아지므로 공통근을 갖는다.
 $a + b = -2$ 이면 두 이차방정식은 모두 $x = 2$ 라는 공통근을 갖는다.

(라) $a + b = -2$ 일 때,

$$x^2 + ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x^2 + ax + 2(-2 - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + a + 2) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } -a - 2$$

$$x^2 + bx + 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (-2 - a)x + 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - a) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } a$$

그런데, $a \neq -1$ 이므로 $-a - 2 \neq a$

$\therefore$ 공통근은 $x = 2$ 하나뿐이다.