

1. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $(m+2)x^2 - 2(m+2)x + 4 > 0$ 이 항상 성립하도록 할 때, 상수 m 의 값의 범위에 속한 정수의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

모든 실수 x 에 대하여 성립하기 위해서는

$$m \geq -2$$

$$D/4 = (m+2)^2 - 4(m+2) < 0 \text{ 이므로}$$

$$m^2 + 4m + 4 - 4m - 8 = m^2 - 4 < 0$$

따라서 $-2 \leq m < 2$ 이므로

만족하는 정수 m 의 개수는

$-2, -1, 0, 1$ 의 4개

2. 부등식 $x^2 + x + m \geq 0$ 의 x 의 값에 관계없이 성립할 때, 실수 m 의 최솟값은?

- ① -4 ② 0 ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$x^2 + x + m \geq 0$ 이 x 의 값에 관계없이 항상 성립하려면
 $x^2 + x + m = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$D = 1^2 - 4m \leq 0 \quad \therefore m \geq \frac{1}{4}$$

따라서 실수 m 의 최솟값은 $\frac{1}{4}$ 이다.

3. 직선 $2x+4y+1=0$ 에 평행하고, 두 직선 $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$ 의 교점을 지나는 직선을 $y=ax+b$ 라 할 때 $2a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

직선 $2x+4y+1=0$ 의 기울기는

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \text{ 에서 } -\frac{1}{2}$$

또, $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$ 을 연립하여 풀면

$$x = -4, y = 3$$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 4)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + 1 \text{ 이므로}$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = 1$$

$$\therefore 2a + b = 0$$

4. 두 직선 $2x + y - 4 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ 의 교점과 점 $(2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

- ① $x - y + 1 = 0$ ② $x + y + 1 = 0$ ③ $x - y - 1 = 0$
④ $x - y + 2 = 0$ ⑤ $x + y + 2 = 0$

해설

두 직선 $2x + y - 4 = 0$ 과 $x - 2y + 3 = 0$ 의
교점을 지나는 직선의 방정식은

$$2x + y - 4 + k(x - 2y + 3) = 0 \cdots \textcircled{7}$$

이때, $\textcircled{7}$ 이 점 $(2, 3)$ 을 지나므로 $3 - k = 0$

$$\therefore k = 3$$

$k = 3$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하여 정리하면 $x - y + 1 = 0$

5. 집합 A, B, C 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : (A \cap B) \subset (A \cup B), q : A = B$

② $p : A \cap (B \cap C) = A, q : A \cup (B \cup C) = B \cup C$

③ $p : A \cup (B \cap C) = A, q : A \cap (B \cup C) = B \cup C$

④ $p : A \cup B = A, q : B = \phi$

⑤ $p : A \cup (B - A) = B, q : A \subset B$

해설

① $(A \cap B) \subset (A \cup B) \Leftarrow A = B$: 필요조건

② $p : A \cap (B \cap C) = A \subset (B \cap C)$

$q : A \cup (B \cup C) = B \cup C \Leftrightarrow A \subset (B \cup C)$

$A \subset (B \cap C) \Rightarrow A \subset (B \cup C)$: 충분조건

③ $p : A \cup (B \cap C) = A \Leftrightarrow (B \cap C) \subset A$

$q : A \cap (B \cup C) = B \cup C \Leftrightarrow (B \cup C) \subset A$

$(B \cap C) \subset A \Leftarrow (B \cup C) \subset A$: 필요조건

④ $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

$B \subset A \Leftarrow B = \emptyset$: 필요조건

⑤ $p : A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c) = A \cup B = B$

$q : A \cup (B - A) = B \Leftrightarrow (A \cup B) = B$

$\Leftrightarrow A \subset B \therefore P \Leftrightarrow Q$: 필요충분조건

6. x, y 가 실수이고 A, B, C 를 집합이라 할 때 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요충분조건은?

- ① $p: x+y \geq 2, q: x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$
 ② $p: |x| + |y| = 0, q: 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$
 ③ $p: xy + 1 > x + y > 2, q: x > 1$ 이고 $y > 1$
 ④ $p: A \subset B \subset C, q: A \subset B$ 또는 $A \subset C$
 ⑤ $p: x+y$ 가 유리수이다. $q: x, y$ 모두 유리수이다.

해설

① $x+y \geq 2 \quad x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (충분조건) (반례: $x = 3, y = -3$)

② $|x| + |y| = 0 \Rightarrow 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$

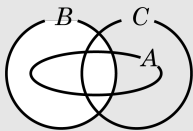
여기서 $|x| + |y| = 0$ 은 $x = 0, y = 0$ 과 같으므로

$x = 0, y = 0 \rightarrow 3\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 0$ (충분조건)

(반례: $x = 8, y = -8$)

③ $xy + 1 > x + y > 2 \Leftrightarrow x > 1$ 이고 $y > 1$

④ $A \subset B \cup C \leftarrow A \subset B$ 또는 $A \subset C$ (충분조건)



⑤ $x+y$ 가 유리수이다. $\leftarrow x, y$ 모두 유리수이다.

(필요조건) (반례: $x = 1 + \sqrt{2}, y = 1 - \sqrt{2}$)

7. 두 이차방정식 $x^2 + ax + 2b = 0$, $x^2 + bx + 2a = 0$ 이 공통근을 가질 경우에 대한 다음 설명 중 옳은 것으로만 짝지어진 것은? (단, 중근은 1개의 근으로 본다.)

(가) $a = 0$ 이면 두 개의 공통근을 갖는다.

(나) $a + b = -2$ 이면 오직 한 개의 공통근을 갖는다.

(다) $a = b$ 이거나 $a + b = -2$ 이면 적어도 한 개의 공통근을 갖는다.

(라) $a + b = -2$ 이고 $a \neq -1$ 이면 오직 한 개의 공통근을 갖는다.

① (가), (나), (다)

② (가), (나)

③ (다)

④ (다), (라)

⑤ (라)

해설

(가) $a = 0$ 일 경우 공통근은 하나뿐

(나) $a = -1$, $b = -1$ 일 경우 $x = -1, 2$ 의 두 개의 공통근을 갖는다.

(다) $a = b$ 이면 두 이차방정식이 같아지므로 공통근을 갖는다.
 $a + b = -2$ 이면 두 이차방정식은 모두 $x = 2$ 라는 공통근을 갖는다.

(라) $a + b = -2$ 일 때,

$$x^2 + ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x^2 + ax + 2(-2 - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + a + 2) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } -a - 2$$

$$x^2 + bx + 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (-2 - a)x + 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - a) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } a$$

그런데, $a \neq -1$ 이므로 $-a - 2 \neq a$

$\therefore$ 공통근은 $x = 2$ 하나뿐이다.

8. 세 개의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ 이 오직 하나의 공통 실근 α 를 가질 때, $a+b+c+\alpha$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

공통 실근을 α 라 하면

$$\begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \cdots ① \\ b\alpha^2 + c\alpha + a = 0 \cdots ② \\ c\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots ③ \end{cases}$$

$$① + ② + ③ : (a+b+c)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

α 가 실수일 때 $\alpha^2 + \alpha + 1 > 0$

$$\therefore a+b+c=0$$

$$① \times \alpha - ② : a(\alpha^3 - 1) = 0,$$

$a \neq 0$ 이고 α 는 실수이므로 $\alpha = 1$

$$\therefore a+b+c+\alpha = 1$$