1. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+2ax+3>0$이 성립하도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

x의 계수가 미지수이므로
ⅰ) $a=0$일 때,
$3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.
ⅱ) $a \neq 0$일 때,
$ax^2+2ax+3>0$의 해가 모든 실수이려면
$a>0 \cdots$ ㉠
$\frac{D}{4}=a^2-3a<0,\ a(a-3)<0$
$\therefore 0<a<3 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<a<3$
ⅰ), ⅱ)에서 $0 \le a<3$
따라서 정수 a는 0, 1, 2의 3개이다.

2. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2(a-5)x + 2(3a-19)$ 가 양이 되기 위한 a 값의 범위는?

① $a < 7$　　② $a > 9$　　③ $6 < a \le 9$
④ $6 \le a < 9$　　⑤ $7 < a < 9$

해설
$x^2 + 2(a-5)x + 2(3a-19) > 0$ 이므로
이 부등식의 $D < 0$ 이다.
$D = (a-5)^2 - 2(3a-19) = a^2 - 16a + 63 < 0$
$\therefore 7 < a < 9$

3. 두 직선 $y = x + 1, y = -2x + 4$ 의 교점과 점 $(-1, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$　② $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$　③ $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$　⑤ $y = \frac{1}{2}x + 3$

해설

$y = x + 1 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$
$y = -2x + 4 \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$ 에서
두 직선의 교점을 지나는 방정식은
$(x - y + 1) + k(2x + y - 4) = 0 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로
$(-1 - 3 + 1) + k \cdot \{2 \cdot (-1) + 3 - 4\} = 0$
$\therefore\ k = -1$
따라서, $k = -1$ 을 ㉠에 대입하면
$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

4. 두 직선 $x + y - 4 = 0,\ 2x - y + 1 = 0$ 의 교점과 점 $(2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -28$

해설

$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$ 을 연립하면

교점 : $(1, 3) \Rightarrow \ (1, 3), (2, -1)$ 을 지나는 직선

$y = \dfrac{-1 - 3}{2 - 1}(x - 1) + 3$

$\Rightarrow \ y = -4x + 7$

$\therefore a = -4,\ b = 7$

$\therefore\ ab = -28$

5. 두 함수 f, g가 $f(x) = 2x - 3$, $g(2x-1) = -6x + 5$ 를 만족할 때, $(f \circ g)(5)$ 의 값은? (단, $f \circ g$ 는 g와 f의 합성함수이다.)

① 18　② 12　③ −15　④ −24　⑤ −29

해설

$(f \circ g)(5) = f(g(5))$

$2x - 1 = 5$ 에서 $x = 3$ 이므로

$g(5) = -6 \cdot 3 + 5 = -13$

$\therefore\ (f \circ g)(5) = f(-13) = 2 \cdot (-13) - 3 = -29$

6. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 $f,\ g,\ h$ 에 대하여 $(h\circ g)(x) = 3x+4$, $f(x)=x^2$ 일 때, $(h\circ(g\circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h\circ(g\circ f))(2) &= ((h\circ g)\circ f)(2)\\ &= (h\circ g)(f(2))\\ &= (h\circ g)(4)\\ &= 3\times 4+4=16\end{aligned}$$

7. 집합 $X = \{-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에서 정의된 함수 $f(x) = |x| + 1$의 치역을 구하면?

① $\{1\}$ ② $\{1,\ 2\}$ ③ $\{2,\ 3\}$

④ $\{1,\ 2,\ 3\}$ ⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

해설

$x = -2,\ 2$일 때 $f(x) = 3$
$x = -1,\ 1$일 때 $f(x) = 2$
$x = 0$일 때 $f(x) = 1$
따라서 f의 치역은 $\{1, 2, 3\}$

8. $X = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y = \left\{y | y\text{는 정수}\right\}$ 일 때, 함수 $f : X \rightarrow Y$가 $f(x) = (x^2$을 5로 나눈 나머지)로 정의할 때, 함수 f의 치역에 있는 모든 원소의 합은 얼마인가?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$f(x) = (x^2$을 5로 나눈 나머지)이므로
$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 4,\ f(3) = 4,\ f(4) = 1,\ f(5) = 0$
$\therefore\ \{f(x) \mid x \in X\} = \{0,\ 1,\ 4\}$
따라서 모든 원소의 합은 $0 + 1 + 4 = 5$

9. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c)=b(b+2c)+(c+a)(c-a)$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형　② 이등변삼각형　③ 정삼각형
④ 예각삼각형　⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c)=b(b+2c)+(c+a)(c-a)$에서
$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}=b^2+2bc+c^2-a^2$
$a^2-(b-c)^2=-a^2+b^2+c^2+2bc$
$2a^2=2b^2+2c^2$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

10. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2006

해설

$2005=x$ 로 놓으면

$$(\text{준 식})=\frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}$$
$$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$=x+1$$
$$=2006$$

11. 두 점 $A(-2,\ 1)$, $B(4,\ -3)$ 에서 같은 거리에 있고 직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점 P 의 좌표는?

① $(-3,\ -7)$ ② $(-2,\ -5)$ ③ $(3,\ 5)$

④ $(2,\ 3)$ ⑤ $(2,\ 5)$

해설

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 하면 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서

$(a+2)^2 + (b-1)^2 = (a-4)^2 + (b+3)^2$

정리하면 $12a - 8b = 20$

$\therefore\ 3a - 2b = 5 \cdots$ ①

또, P 는 $y = 2x - 1$ 위에 있으므로

$b = 2a - 1 \cdots$ ②

①, ② 를 연립하여 풀면 $a = -3,\ b = -7$

12. 직선 $y = x + 2$ 위의 점 P는 두 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$, $\mathrm{B}(4, -2)$로부터 같은 거리에 있다고 할 때, 점 P의 좌표는?

① $(-1, 1)$ ② $(0, 2)$ ③ $(1, 3)$
④ $(2, 4)$ ⑤ $(3, 5)$

해설

P가 $y = x + 2$ 위에 있으므로 $\mathrm{P}(a,\ a+2)$라고 놓을 수 있다.
$\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$이므로
$\sqrt{(a+2)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (a+4)^2}$
$2(a+2)^2 = (a-4)^2 + (a+4)^2$
$8a = 24$
$\therefore\ a = 3$
$\therefore\ \mathrm{P}(3,\ 5)$

13. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$\{1,\ 3\} \subset X \subset A,\ n(X) = 4$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

X 는 원소 1, 3 을 뺀 $\{2,\ 4,\ 5\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 2 개인 부분집합에 원소 1, 3 을 포함시킨 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$, $\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 의 3 개이다.

14. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 12 이하의 홀수 $\}$, $B = \{x \mid x$는 3 이상 5 이하의 소수 $\}$에 대하여 $X \subset A$이고 $B \subset X$일때, 집합 X 의 원소의 개수가 5 개인 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$

$B = \{3,\ 5\}$

$X \subset A,\ B \subset X$ 이므로 $B \subset X \subset A$

$\{3,\ 5\} \subset X \subset \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$

집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 3, 5 는 반드시 포함하고 원소의 개수가 5 개인 집합이므로 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$, $\{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 11\}$, $\{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$ 의 4 개이다.

15. 전체 집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B)^c = B-A$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

① $A \cap B = \varnothing$　② $A \cup B = U$　③ $A \subset B^c$
④ $A^c \cup B = U$　⑤ $A = B^c$

해설
$(A-B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B$, $B-A = A^c \cap B$ $A^c \cup B = A^c \cap B$
에서 $A^c = B$
즉, $A = B^c$

16. 집합 $A,\ B,\ C$에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : (A \cap B) \subset (A \cup B),\ q : A = B$

② $p : A \cap (B \cap C) = A,\ q : A \cup (B \cup C) = B \cup C$

③ $p : A \cup (B \cap C) = A,\ q : A \cap (B \cup C) = B \cup C$

④ $p : A \cup B = A,\ q : B = \phi$

⑤ $p : A \cup (B - A) = B,\ q : A \subset B$

해설

① $(A \cap B) \subset (A \cup B) \ \Leftarrow\ A = B$: 필요조건
② $p : A \cap (B \cap C) = A \ \subset (B \cap C)$
$q : A \cup (B \cup C) = B \cup C \ \Leftrightarrow\ A \subset (B \cup C)$
$A \subset (B \cap C) \ \Rightarrow\ A \subset (B \cup C)$: 충분조건
③ $p : A \cup (B \cap C) = A \ \Leftrightarrow\ (B \cap C) \subset A$
$q : A \cap (B \cup C) = B \cup C \ \Leftrightarrow\ (B \cup C) \subset A$
$(B \cap C) \subset A \ \Leftarrow\ (B \cup C) \subset A$: 필요조건
④ $A \cup B = A \ \Leftrightarrow\ B \subset A$
$B \subset A \ \Leftarrow\ B = \varnothing$: 필요조건
⑤ $p : A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c) = A \cup B = B$
$q : A \cup (B - A) = B \ \Leftrightarrow\ (A \cup B) = B$
$\Leftrightarrow\ A \subset B \ \therefore\ P \Leftrightarrow Q$: 필요충분조건

17. 다항식 $f(x)$는 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지고 $x+4$로 나누면 3이 남는다. $f(x)$를 $(x+2)^2(x+4)$로 나눌 때, 나머지를 구하면?

① $\frac{3}{4}(x+2)^2$　② $\frac{3}{2}(x+2)^2$　③ $3(x+2)^2$
④ $(x+2)(x+4)$　⑤ $3x^2+4x+3$

해설

$f(x)=(x+2)^2(x+4)Q(x)+ax^2+bx+c$라 놓으면 $f(x)$는 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지므로
$ax^2+bx+c=a(x+2)^2$
$\therefore\ f(x)=(x+2)^2(x+4)Q(x)+a(x+2)^2$
또 $f(x)$를 $(x+4)$로 나눌 때 나머지가 3이므로 $f(-4)=3$
$\therefore\ 4a=3,\ a=\frac{3}{4}$
$\therefore$ 구하는 나머지는 $\frac{3}{4}(x+2)^2$

18. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(단, a, b, c는 상수) 라고 하면,

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

그런데 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이므로

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+(x+1)$

또 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 4이므로

$f(1)=2a+2=4$에서 $a=1$

따라서 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1=x^2+x+2$

$\therefore$ 구하는 나머지의 상수항은 2

19. $m > 0$이고 이차방정식 $mx^2 + (3m-5)x - 24 = 0$의 두 근의 절대값의 비가 $3:2$일 때, 정수가 아닌 m의 값은?

① $\frac{25}{9}$ ② $\frac{26}{9}$ ③ $\frac{28}{9}$ ④ $\frac{29}{9}$ ⑤ $\frac{31}{9}$

해설

$m > 0$에서 두 근의 곱이 $-\frac{24}{m} < 0$이므로

서로 다른 부호의 두 실근을 갖는다.

따라서, 방정식의 두 근을 $3\alpha,\ -2\alpha$라 놓을 수 있다.

근과 계수와의 관계로부터

$$\begin{cases} 3a + (-2\alpha) = -\frac{3m-5}{m} \\ 3\alpha(-2\alpha) = -\frac{24}{m} \end{cases}$$

$\therefore\ \left(-\frac{3m-5}{m}\right)^2 = \frac{4}{m} \quad \therefore\ (3m-5)^2 = 4m$

정리하여 인수분해하면 $(9m-25)(m-1) = 0$

$\therefore\ m = \frac{25}{9},\ 1$

따라서 정수가 아닌 m의 값은 $\frac{25}{9}$이다.

20. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 서로 다른 두 근 $\alpha,\ \beta$를 갖는다. $f(x)=x^2+bx+a$에 대하여 $f(\alpha)=\beta,\ f(\beta)=\alpha$가 성립할 때, $a+b$의 값은?

① 0　② -1　③ -2　④ -3　⑤ -4

해설

근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$
$f(\alpha)=\alpha^2+b\alpha+a=\beta\cdots$㉠
$f(\beta)=\beta^2+b\beta+a=\alpha\cdots$㉡
㉠ − ㉡하면
$\alpha^2-\beta^2+b(\alpha-\beta)=\beta-\alpha$
$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+b+1)=0$
$\alpha\neq\beta$이므로 $\alpha+\beta+b+1=0$
$\therefore\ -a+b+1=0\cdots$㉢
㉠ + ㉡하면
$\alpha^2+\beta^2+b(\alpha+\beta)+2a=\alpha+\beta$
$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(b-1)(\alpha+\beta)+2a=0$
$\therefore\ a^2-2b-a(b-1)+2a=0\cdots$㉣
㉢에서 $b=a-1$을 ㉣에 대입하면
$a^2-2(a-1)-a(a-1-1)+2a=0,\ 2a+2=0$
$\therefore\ a=-1,\ b=-2$
$\therefore\ a+b=-3$

21. 포물선 $y = x^2 - 7x + 10$ 이 직선 $y = 2x + k$ 에 의하여 잘려지는 선분의 길이가 5 일 때 상수 k 의 값은?

① -9　② -6　③ 0　④ 6　⑤ 9

해설

$x^2 - 7x^2 + 10 = 2x + k$ 에서

$x^2 - 9x + (10 - k) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

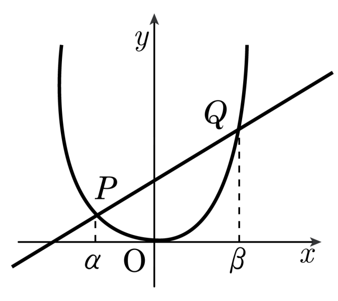
$\alpha + \beta = 9, \alpha\beta = 10 - k$

교점 $\mathrm{A}(\alpha, 2\alpha + \mathrm{k}), \mathrm{B}(\beta, 2\beta + \mathrm{k})$

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= (\alpha - \beta)^2 + (2\alpha + k - 2\beta - k)^2 = 5(\alpha - \beta)^2 \\ &= 5\left\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\right\} = 5(4k + 41) \\ &= 5^2\end{aligned}$$

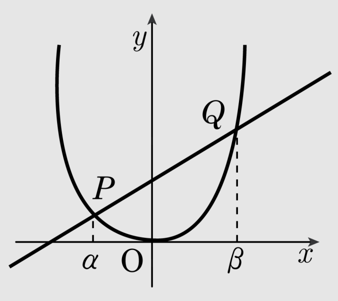
$\therefore k = -9$

22. 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = m(x+3)$ 이 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만나고 원점을 연결한 선분 OP 와 OQ 가 수직이 될 때, m 의 값은?



① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{5}$

해설



교점 P, Q 의 좌표는
$x^2 = m(x+3),\ x^2 - mx - 3m = 0$ 의 두 근이므로
두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = m, \alpha\beta = -3m$
$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 기울기 : $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, $\overline{\mathrm{OQ}}$ 의 기울기 : $\frac{\beta^2}{\beta} = \beta$
두 직선이 수직이므로 $\alpha\beta = -1, -3m = -1$
$\therefore m = \frac{1}{3}$

23. 두 이차방정식 $x^2+ax+2b=0$, $x^2+bx+2a=0$이 공통근을 가질 경우에 대한 다음 설명 중 옳은 것으로만 짝지어진 것은? (단, 중근은 1개의 근으로 본다.)

(가) $a=0$이면 두 개의 공통근을 갖는다. (나) $a+b=-2$이면 오직 한 개의 공통근을 갖는다. (다) $a=b$이거나 $a+b=-2$이면 적어도 한 개의 공통근을 갖는다. (라) $a+b=-2$이고 $a\neq-1$이면 오직 한 개의 공통근을 갖는다.

① (가), (나), (다) ② (가), (나) ③ (다)
④ (다), (라) ⑤ (라)

해설

(가) $a=0$일 경우 공통근은 하나뿐
(나) $a=-1$, $b=-1$일 경우 $x=-1, 2$의 두 개의 공통근을 갖는다.
(다) $a=b$이면 두 이차방정식이 같아지므로 공통근을 갖는다.
$a+b=-2$이면 두 이차방정식은 모두 $x=2$라는 공통근을 갖는다.
(라) $a+b=-2$일 때,
$x^2+ax+2b=0 \Leftrightarrow x^2+ax+2(-2-a)=0$
$\Leftrightarrow (x-2)(x+a+2)=0$
$\therefore\ x=2$ 또는 $-a-2$
$x^2+bx+2a=0$
$\Leftrightarrow x^2+(-2-a)x+2a=0$
$\Leftrightarrow (x-2)(x-a)=0$
$\therefore\ x=2$ 또는 a
그런데, $a\neq-1$이므로 $-a-2\neq a$
$\therefore$공통근은 $x=2$ 하나뿐이다.

24. 세 개의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ 이 오직 하나의 공통 실근 α를 가질 때, $a+b+c+\alpha$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

공통 실근을 α라 하면

$$\begin{cases} a\alpha^2+b\alpha+c=0 \cdots ① \\ b\alpha^2+c\alpha+a=0 \cdots ② \\ c\alpha^2+a\alpha+b=0 \cdots ③ \end{cases}$$

① + ② + ③ : $(a+b+c)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

α가 실수일 때 $\alpha^2+\alpha+1>0$

$\therefore\ a+b+c=0$

① × α − ② : $a(\alpha^3-1)=0$,

$a \neq 0$이고 α는 실수이므로 $\alpha=1$

$\therefore\ a+b+c+\alpha=1$