

1. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $ax^2 + 2ax + 3 > 0$ 이 성립하도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

x 의 계수가 미지수이므로

i) $a = 0$ 일 때,

$3 > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립한다.

ii) $a \neq 0$ 일 때,

$ax^2 + 2ax + 3 > 0$ 의 해가 모든 실수이려면

$$a > 0 \cdots \textcircled{\Gamma}$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3a < 0, \quad a(a - 3) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 3 \cdots \textcircled{\Delta}$$

$\textcircled{\Gamma}$, $\textcircled{\Delta}$ 의 공통 범위를 구하면 $0 < a < 3$

i), ii)에서 $0 \leq a < 3$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2의 3개이다.

2. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2(a - 5)x + 2(3a - 19)$ 가 양이 되기 위한 a 값의 범위는?

① $a < 7$

② $a > 9$

③ $6 < a \leq 9$

④ $6 \leq a < 9$

⑤ $7 < a < 9$

해설

$x^2 + 2(a - 5)x + 2(3a - 19) > 0$ 이므로
이 부등식의 $D < 0$ 이다.

$$D = (a - 5)^2 - 2(3a - 19) = a^2 - 16a + 63 < 0$$

$$\therefore 7 < a < 9$$

3. 두 직선 $y = x + 1, y = -2x + 4$ 의 교점과 점 $(-1, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

② $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

③ $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

④ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

⑤ $y = \frac{1}{2}x + 3$

해설

$$y = x + 1 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$$

$$y = -2x + 4 \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0 \text{에서}$$

두 직선의 교점을 지나는 방정식은

$$(x - y + 1) + k(2x + y - 4) = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①이 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로

$$(-1 - 3 + 1) + k \cdot \{2 \cdot (-1) + 3 - 4\} = 0$$

$$\therefore k = -1$$

따라서, $k = -1$ 을 ①에 대입하면

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

4. 두 직선 $x + y - 4 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ 의 교점과 점 $(2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $ab = -28$

해설

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{을 연립하면}$$

교점 : $(1, 3) \Rightarrow (1, 3), (2, -1)$ 을 지나는 직선

$$y = \frac{-1 - 3}{2 - 1}(x - 1) + 3$$

$$\Rightarrow y = -4x + 7$$

$$\therefore a = -4, b = 7$$

$$\therefore ab = -28$$

5. 두 함수 f, g 가 $f(x) = 2x - 3$, $g(2x - 1) = -6x + 5$ 를 만족할 때, $(f \circ g)(5)$ 의 값은? (단, $f \circ g$ 는 g 와 f 의 합성함수이다.)

① 18

② 12

③ -15

④ -24

⑤ -29

해설

$$(f \circ g)(5) = f(g(5))$$

$2x - 1 = 5$ 에서 $x = 3$ 이므로

$$g(5) = -6 \cdot 3 + 5 = -13$$

$$\therefore (f \circ g)(5) = f(-13) = 2 \cdot (-13) - 3 = -29$$

6. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

7. 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = |x| + 1$ 의 치역을 구하면?

① $\{1\}$

② $\{1, 2\}$

③ $\{2, 3\}$

④ $\{1, 2, 3\}$

⑤ $\{1, 2, 3, 4\}$

해설

$x = -2, 2$ 일 때 $f(x) = 3$

$x = -1, 1$ 일 때 $f(x) = 2$

$x = 0$ 일 때 $f(x) = 1$

따라서 f 의 치역은 $\{1, 2, 3\}$

8. $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{y | y \text{는 정수}\}$ 일 때, 함수 $f : X \rightarrow Y$ 가 $f(x) = (x^2 \text{을 } 5 \text{로 나눈 나머지})$ 로 정의할 때, 함수 f 의 치역에 있는 모든 원소의 합은 얼마인가?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$f(x) = (x^2 \text{을 } 5 \text{로 나눈 나머지})$ 이므로

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 4, f(4) = 1, f(5) = 0$$

$$\therefore \{f(x) \mid x \in X\} = \{0, 1, 4\}$$

따라서 모든 원소의 합은 $0 + 1 + 4 = 5$

9. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c) + (c+a)(c-a)$ 가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형
④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$$(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c) + (c+a)(c-a) \text{에서}$$

$$\{a+(b-c)\} \{a-(b-c)\} = b^2 + 2bc + c^2 - a^2$$

$$a^2 - (b-c)^2 = -a^2 + b^2 + c^2 + 2bc$$

$$2a^2 = 2b^2 + 2c^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

10. $\frac{2005^3 + 1}{2005 \times 2004 + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

2005 = x 로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{x^3 + 1^3}{x(x-1) + 1} \\&= \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} \\&= x + 1 \\&= 2006\end{aligned}$$

11. 두 점 $A(-2, 1)$, $B(4, -3)$ 에서 같은 거리에 있고 직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점 P 의 좌표는?

- ① $(-3, -7)$ ② $(-2, -5)$ ③ $(3, 5)$
④ $(2, 3)$ ⑤ $(2, 5)$

해설

점 P 의 좌표를 (a, b) 라 하면 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서

$$(a + 2)^2 + (b - 1)^2 = (a - 4)^2 + (b + 3)^2$$

정리하면 $12a - 8b = 20$

$$\therefore 3a - 2b = 5 \cdots \textcircled{1}$$

또, P 는 $y = 2x - 1$ 위에 있으므로

$$b = 2a - 1 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3$, $b = -7$

12. 직선 $y = x + 2$ 위의 점 P는 두 점 A(-2, 0), B(4, -2)로부터 같은 거리에 있다고 할 때, 점 P의 좌표는?

① (-1, 1)

② (0, 2)

③ (1, 3)

④ (2, 4)

⑤ (3, 5)

해설

P가 $y = x + 2$ 위에 있으므로 $P(a, a + 2)$ 라고 놓을 수 있다.

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로

$$\sqrt{(a + 2)^2 + (a + 2)^2} = \sqrt{(a - 4)^2 + (a + 4)^2}$$

$$2(a + 2)^2 = (a - 4)^2 + (a + 4)^2$$

$$8a = 24$$

$$\therefore a = 3$$

$$\therefore P(3, 5)$$

13. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$$\{1, 3\} \subset X \subset A, n(X) = 4$$



답 :

개



정답 : 3 개

해설

X 는 원소 1, 3 을 뺀 $\{2, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 2 개인 부분집합에 원소 1, 3 을 포함시킨 $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$ 의 3 개이다.

14. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{ 이하의 홀수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{ 이상 } 5 \text{ 이하의 소수}\}$ 에 대하여 $X \subset A$ 이고 $B \subset X$ 일때, 집합 X 의 원소의 개수가 5개인 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4 개

해설

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

$$B = \{3, 5\}$$

$$X \subset A, B \subset X \text{ 이므로 } B \subset X \subset A$$

$$\{3, 5\} \subset X \subset \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 3, 5는 반드시 포함하고 원소의 개수가 5개인 집합이므로 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $\{1, 3, 5, 7, 11\}$, $\{1, 3, 5, 9, 11\}$, $\{3, 5, 7, 9, 11\}$ 의 4개이다.

15. 전체 집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B)^c = B - A$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

① $A \cap B = \emptyset$

② $A \cup B = U$

③ $A \subset B^c$

④ $A^c \cup B = U$

⑤ $A = B^c$

해설

$$(A - B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B, \quad B - A = A^c \cap B$$

에서 $A^c = B$

즉, $A = B^c$

16. 집합 A, B, C 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : (A \cap B) \subset (A \cup B), q : A = B$

② $p : A \cap (B \cap C) = A, q : A \cup (B \cup C) = B \cup C$

③ $p : A \cup (B \cap C) = A, q : A \cap (B \cup C) = B \cup C$

④ $p : A \cup B = A, q : B = \phi$

⑤ $p : A \cup (B - A) = B, q : A \subset B$

해설

① $(A \cap B) \subset (A \cup B) \Leftarrow A = B$: 필요조건

② $p : A \cap (B \cap C) = A \subset (B \cap C)$

$q : A \cup (B \cup C) = B \cup C \Leftrightarrow A \subset (B \cup C)$

$A \subset (B \cap C) \Rightarrow A \subset (B \cup C)$: 충분조건

③ $p : A \cup (B \cap C) = A \Leftrightarrow (B \cap C) \subset A$

$q : A \cap (B \cup C) = B \cup C \Leftrightarrow (B \cup C) \subset A$

$(B \cap C) \subset A \Leftarrow (B \cup C) \subset A$: 필요조건

④ $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

$B \subset A \Leftarrow B = \emptyset$: 필요조건

⑤ $p : A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c) = A \cup B = B$

$q : A \cup (B - A) = B \Leftrightarrow (A \cup B) = B$

$\Leftrightarrow A \subset B \therefore P \Leftrightarrow Q$: 필요충분조건

17. 다항식 $f(x)$ 는 $(x+2)^2$ 으로 나누어떨어지고 $x+4$ 로 나누면 3 이 남는다. $f(x)$ 를 $(x+2)^2(x+4)$ 로 나눌 때, 나머지를 구하면?

① $\frac{3}{4}(x+2)^2$

② $\frac{3}{2}(x+2)^2$

③ $3(x+2)^2$

④ $(x+2)(x+4)$

⑤ $3x^2 + 4x + 3$

해설

$f(x) = (x+2)^2(x+4)Q(x) + ax^2 + bx + c$ 라 놓으면 $f(x)$ 는 $(x+2)^2$ 으로 나누어떨어지므로

$$ax^2 + bx + c = a(x+2)^2$$

$$\therefore f(x) = (x+2)^2(x+4)Q(x) + a(x+2)^2$$

또 $f(x)$ 를 $(x+4)$ 로 나눌 때 나머지가 3 이므로 $f(-4) = 3$

$$\therefore 4a = 3, a = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{구하는 나머지는 } \frac{3}{4}(x+2)^2$$

18. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이고, $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c 는 상수)라고 하면,

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

그런데 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이므로

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + a(x^2 + 1) + (x + 1)$$

또 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이므로

$$f(1) = 2a + 2 = 4 \text{에서 } a = 1$$

$$\text{따라서 } ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + x + 1 = x^2 + x + 2$$

$\therefore$ 구하는 나머지의 상수항은 2

19. $m > 0$ 이고 이차방정식 $mx^2 + (3m - 5)x - 24 = 0$ 의 두 근의 절대값의 비가 3 : 2일 때, 정수가 아닌 m 의 값은?

① $\frac{25}{9}$

② $\frac{26}{9}$

③ $\frac{28}{9}$

④ $\frac{29}{9}$

⑤ $\frac{31}{9}$

해설

$m > 0$ 에서 두 근의 곱이 $-\frac{24}{m} < 0$ 이므로

서로 다른 부호의 두 실근을 갖는다.

따라서, 방정식의 두 근을 3α , -2α 라 놓을 수 있다.

근과 계수와의 관계로부터

$$\begin{cases} 3\alpha + (-2\alpha) = -\frac{3m-5}{m} \\ 3\alpha(-2\alpha) = -\frac{24}{m} \end{cases}$$

$$\therefore \left(-\frac{3m-5}{m}\right)^2 = \frac{4}{m} \quad \therefore (3m-5)^2 = 4m$$

정리하여 인수분해하면 $(9m-25)(m-1) = 0$

$$\therefore m = \frac{25}{9}, 1$$

따라서 정수가 아닌 m 의 값은 $\frac{25}{9}$ 이다.

20. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 은 서로 다른 두 근 α, β 를 갖는다.
 $f(x) = x^2 + bx + a$ 에 대하여 $f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha$ 가 성립할 때, $a + b$ 의 값은?

① 0

② -1

③ -2

④ -3

⑤ -4

해설

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$$

$$f(\alpha) = \alpha^2 + b\alpha + a = \beta \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(\beta) = \beta^2 + b\beta + a = \alpha \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 하면

$$\alpha^2 - \beta^2 + b(\alpha - \beta) = \beta - \alpha$$

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + b + 1) = 0$$

$$\alpha \neq \beta \text{이므로 } \alpha + \beta + b + 1 = 0$$

$$\therefore -a + b + 1 = 0 \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 하면

$$\alpha^2 + \beta^2 + b(\alpha + \beta) + 2a = \alpha + \beta$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + (b - 1)(\alpha + \beta) + 2a = 0$$

$$\therefore a^2 - 2b - a(b - 1) + 2a = 0 \cdots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉢}$ 에서 $b = a - 1$ 을 $\textcircled{㉣}$ 에 대입하면

$$a^2 - 2(a - 1) - a(a - 1 - 1) + 2a = 0, 2a + 2 = 0$$

$$\therefore a = -1, b = -2$$

$$\therefore a + b = -3$$

21. 포물선 $y = x^2 - 7x + 10$ 이 직선 $y = 2x + k$ 에 의하여 잘려지는 선분의 길이가 5 일 때 상수 k 의 값은?

① -9

② -6

③ 0

④ 6

⑤ 9

해설

$$x^2 - 7x^2 + 10 = 2x + k \text{ 에서}$$

$$x^2 - 9x + (10 - k) = 0 \text{ 의 두 근을 } \alpha, \beta \text{ 라 하면}$$

$$\alpha + \beta = 9, \alpha\beta = 10 - k$$

$$\text{교점 } A(\alpha, 2\alpha + k), B(\beta, 2\beta + k)$$

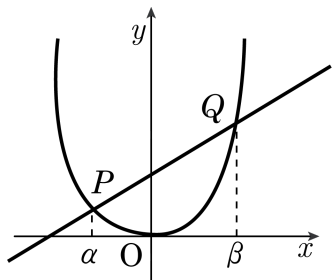
$$\overline{AB}^2 = (\alpha - \beta)^2 + (2\alpha + k - 2\beta - k)^2 = 5(\alpha - \beta)^2$$

$$= 5 \{ (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \} = 5(4k + 41)$$

$$= 5^2$$

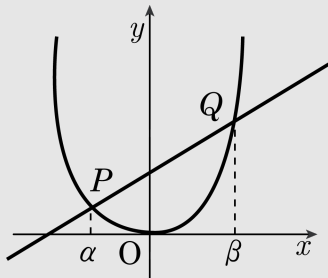
$$\therefore k = -9$$

22. 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = m(x + 3)$ 이 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만나고 원점을 연결한 선분 OP 와 OQ 가 수직이 될 때, m 의 값은?



- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설



교점 P, Q 의 좌표는

$x^2 = m(x + 3)$, $x^2 - mx - 3m = 0$ 의 두 근이므로
두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = m$, $\alpha\beta = -3m$

$\overline{OP}$ 의 기울기 : $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, $\overline{OQ}$ 의 기울기 : $\frac{\beta^2}{\beta} = \beta$

두 직선이 수직이므로 $\alpha\beta = -1$, $-3m = -1$

$$\therefore m = \frac{1}{3}$$

23. 두 이차방정식 $x^2 + ax + 2b = 0$, $x^2 + bx + 2a = 0$ 이 공통근을 가질 경우에 대한 다음 설명 중 옳은 것으로만 짝지어진 것은? (단, 중근은 1개의 근으로 본다.)

(가) $a = 0$ 이면 두 개의 공통근을 갖는다.

(나) $a + b = -2$ 이면 오직 한 개의 공통근을 갖는다.

(다) $a = b$ 이거나 $a + b = -2$ 이면 적어도 한 개의 공통근을 갖는다.

(라) $a + b = -2$ 이고 $a \neq -1$ 이면 오직 한 개의 공통근을 갖는다.

① (가), (나), (다)

② (가), (나)

③ (다)

④ (다), (라)

⑤ (라)

해설

(가) $a = 0$ 일 경우 공통근은 하나뿐

(나) $a = -1$, $b = -1$ 일 경우 $x = -1, 2$ 의 두 개의 공통근을 갖는다.

(다) $a = b$ 이면 두 이차방정식이 같아지므로 공통근을 갖는다.
 $a + b = -2$ 이면 두 이차방정식은 모두 $x = 2$ 라는 공통근을 갖는다.

(라) $a + b = -2$ 일 때,

$$x^2 + ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x^2 + ax + 2(-2 - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + a + 2) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } -a - 2$$

$$x^2 + bx + 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (-2 - a)x + 2a = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - a) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } a$$

그런데, $a \neq -1$ 이므로 $-a - 2 \neq a$

$\therefore$ 공통근은 $x = 2$ 하나뿐이다.

24. 세 개의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ 이 오직 하나의 공통 실근 α 를 가질 때, $a+b+c+\alpha$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

공통 실근을 α 라 하면

$$\begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \cdots ① \\ b\alpha^2 + c\alpha + a = 0 \cdots ② \\ c\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots ③ \end{cases}$$

$$① + ② + ③ : (a+b+c)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

α 가 실수일 때 $\alpha^2 + \alpha + 1 > 0$

$$\therefore a+b+c=0$$

$$① \times \alpha - ② : a(\alpha^3 - 1) = 0,$$

$a \neq 0$ 이고 α 는 실수이므로 $\alpha = 1$

$$\therefore a+b+c+\alpha = 1$$