

1. 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $kx^2 - 2(k-4)x + 2 \geq 0$ 이 성립하도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?
- ① $k \leq -2$ ② $-1 \leq k \leq 2$ ③ $1 \leq k \leq 8$
④ $2 \leq k \leq 8$ ⑤ $k \leq 8$

해설

x^2 의 계수가 미지수 k 이므로
i) $k = 0$ 일 때 $8x + 2 \geq 0$ 에서 $x \geq -\frac{1}{4}$ 이므로
모든 실수 x 에 대하여 성립하는 것은 아니다.
ii) $k \neq 0$ 일 때 $kx^2 - 2(k-4)x + 2 \geq 0$ 의 해가 모든 실수이려면
 $k > 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\frac{D}{4} = (k-4)^2 - 2k \leq 0, k^2 - 10k + 16 \leq 0,$
 $(k-2)(k-8) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq k \leq 8 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통 범위를 구하면 $2 \leq k \leq 8$
i), ii)에서 $2 \leq k \leq 8$ 이다.

2. 모든 실수 x, y 에 대하여 $\sqrt{mx^2 - mx + 2}$ 가 0이 아닌 실수가 될 실수 m 의 값의 범위는?

- ① $0 < m < 4$ ② $4 \leq m \leq 8$ ③ $0 \leq m < 8$
④ $4 < m \leq 8$ ⑤ $m \geq 8$

해설

$\sqrt{mx^2 - mx + 2}$ 가 0이 아닌 실수가 되려면 $mx^2 - mx + 2 > 0$ 이어야 한다.

i) $m = 0$ 일 때 $0 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 2 > 0$ 이므로

모든 실수 x 에 대하여 항상 성립한다.

ii) $m \neq 0$ 일 때 $mx^2 - mx + 2 > 0$ 가

모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하려면

$m > 0 \cdots \textcircled{1}$

또 이차방정식 $mx^2 - mx + 2 = 0$ 의 판별식을

D 라 할 때

$D = (-m)^2 - 8m < 0, m(m - 8) < 0$

$\therefore 0 < m < 8 \cdots \textcircled{2}$

①, ②의 공통 범위를 구하면 $0 < m < 8$

i), ii)에서 $0 \leq m < 8$

3. 집합 A, B, C 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?

- ① $p : (A \cap B) \subset (A \cup B), q : A = B$
- ② $p : A \cap (B \cap C) = A, q : A \cup (B \cup C) = B \cup C$
- ③ $p : A \cup (B \cap C) = A, q : A \cap (B \cup C) = B \cup C$
- ④ $p : A \cup B = A, q : B = \phi$
- ⑤ $p : A \cup (B - A) = B, q : A \subset B$

해설

- ① $(A \cap B) \subset (A \cup B) \Leftarrow A = B$: 필요조건
- ② $p : A \cap (B \cap C) = A \subset (B \cap C)$
 $q : A \cup (B \cup C) = B \cup C \Leftrightarrow A \subset (B \cup C)$
 $A \subset (B \cap C) \Rightarrow A \subset (B \cup C)$: 충분조건
- ③ $p : A \cup (B \cap C) = A \Leftrightarrow (B \cap C) \subset A$
 $q : A \cap (B \cup C) = B \cup C \Leftrightarrow (B \cup C) \subset A$
 $(B \cap C) \subset A \Leftarrow (B \cup C) \subset A$: 필요조건
- ④ $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$
 $B \subset A \Leftarrow B = \emptyset$: 필요조건
- ⑤ $p : A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c) = A \cup B = B$
 $q : A \cup (B - A) = B \Leftrightarrow (A \cup B) = B$
 $\Leftrightarrow A \subset B \therefore P \Leftrightarrow Q$: 필요충분조건

4. 다음은 a, b 가 실수일 때, 보기 중에서 서로 동치인 것끼리 짝지어 놓은 것이다. 옳지 않은 것은?

보기

- | | |
|----------------------------|--------------------------|
| ㉠ $ab = 0$ | ㉡ $a^2 + b^2 = 0$ |
| ㉢ $a^2 + b^2 > 0$ | ㉣ $a = 0$ 이고 $b = 0$ |
| ㉤ $a = 0$ 또는 $b = 0$ | ㉥ $a = 0$ 이고 $b \neq 0$ |
| ㉦ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ | ㉧ $ab = 0$ 이고 $b \neq 0$ |
| ㉨ $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$ | |

- ① ㉠과 ㉤ ② ㉡와 ㉣ ③ ㉢과 ㉦
- ④ ㉤와 ㉧ ⑤ ㉣과 ㉨

해설

$ab \leftrightarrow a = 0$ 또는 $b = 0$
 $a^2 + b^2 \leftrightarrow a = 0$ 이고 $b = 0$
 $a^2 + b^2 > 0 \leftrightarrow a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$
 $ab = 0$ 이고 $b \neq 0 \leftrightarrow a = 0$ 이고 $b \neq 0$

5. 다항식 $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2x+1$ 이고, $(x-2)^3$ 으로 나눈 나머지가 x^2-x+6 이다. $f(x)$ 를 $(x+1)(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$

② $3x-2$

③ $3x+2$

④ x^2-2x+1

⑤ x^2-x+6

해설

$$f(x) = (x+1)^2 A(x) + 2x+1 \text{ 에서 } f(-1) = -1$$

$$f(x) = (x-2)^3 B(x) + x^2 - x + 6$$

$$= (x-2)^3 B(x) + (x-2)^2 + 3x + 2$$

$$= (x-2)^2 ((x-2)B(x) + 1) + 3x + 2$$

즉 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 ax^2+bx+c 라 하면

$$f(x) = (x+1)(x-2)^2 Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x+1)(x-2)^2 Q(x) + a(x-2)^2 + 3x + 2$$

$$f(-1) = 9a - 1 = -1 \quad \therefore a = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 + 3x + 2$$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $3x+2$

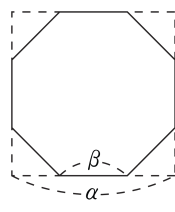
6. $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누면 나머지가 3이고, 또 (x^2+x+1) 로 나누면 나머지가 $2x+4$ 이다. 이 때, $f(x)$ 를 x^3-1 로 나눈 나머지를 구하면?

- ① x^2+x+3 ② x^2+2x+3 ③ $-x^2+x+3$
④ $-x^2+2x+3$ ⑤ x^2+3x+1

해설

$f(x) = (x^3-1)Q(x) + ax^2+bx+c$ 라 하면
 $f(x)$ 를 (x^2+x+1) 로 나눈 나머지는 ax^2+bx+c 에서 발생한다.
 $\therefore ax^2+bx+c = a(x^2+x+1) + 2x+4 \cdots \textcircled{1}$
 $\therefore f(x) = (x^3-1)Q(x) + a(x^2+x+1) + (2x+4)$
그런데 $f(1) = 3$ 이므로 $3a+6=3$
 $\therefore \textcircled{1}$ 에서 $b=1, c=3$
따라서, 구하는 나머지는 $-x^2+x+3$

7. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 α 인 정사각형의 네 귀퉁이를 잘라 정8각형을 만들고 그 한 변의 길이를 β 라 하면, α, β 는 이차방정식 $x^2 + px + (\sqrt{2} + 1) = 0$ 의 두 근이 된다고 한다. 다음 중 α, p 의 값으로 옳은 것은?



- ① $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = \sqrt{2} - 1$
 ② $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$
 ③ $\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad p = -\sqrt{2}$
 ④ $\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad p = -\sqrt{2} - 2$
 ⑤ $\alpha = \sqrt{2} - 1, \quad p = -\sqrt{2} - 1$

해설

잘라낸 귀퉁이는 빗변의 길이가 β 인 직각이등변삼각형이므로 다른 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}\beta$ 이다.

$$2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\beta + \beta = \alpha \text{ 이므로}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)\alpha$$

α, β 는 $x^2 + px + (\sqrt{2} + 1) = 0$ 의 두 근이므로

$$\alpha\beta = (\sqrt{2} - 1)\alpha^2 = \sqrt{2} + 1 \text{ 에서}$$

$$\alpha^2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$\alpha > 0 \text{ 이므로 } \alpha = \sqrt{2} + 1$$

$$\therefore p = -(\alpha + \beta) = -\{\alpha + (\sqrt{2} - 1)\alpha\} = -\sqrt{2} - 2$$

8. 서로 다른 두 실수 a, b 에 대하여 두 방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$ 과 $x^2 + 2bx + a = 0$ 의 두 근의 차가 서로 같을 때, a, b 의 관계식은?

- ① $a + b = 0$
- ② $a - b - 1 = 0$
- ③ $a - b + 1 = 0$
- ④ $a + b - 1 = 0$
- ⑤ $a + b + 1 = 0$

해설

$x^2 + 2ax + b = 0$ 의 해를 α, β
 $x^2 + 2bx + a = 0$ 의 해를 γ, δ 라 하면
 $|\alpha - \beta| = |\gamma - \delta|$ 에서
 $(\alpha - \beta)^2 = (\gamma - \delta)^2$,
 $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta$
 $(-2a)^2 - 4b = (-2b)^2 - 4a$
 $\therefore (a - b)(a + b + 1) = 0$
 $a \neq b$ 이므로 $a + b + 1 = 0$

9. 함수 $f(x) = \frac{x^2}{4} + a(x \geq 0)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$ 가 서로 다른 두 양의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $0 \leq a < 1$
- ② $a \geq 0$
- ③ $a < 1$
- ④ $0 < a < 1$
- ⑤ $a < 2$

해설

$f(x) = \frac{x^2}{4} + a(x \geq 0)$ 와 그 역함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점은 직선 $y = x$ 위에 있다.

따라서, 방정식 $\frac{x^2}{4} + a = x$,

즉 $x^2 - 4x + 4a = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

$x^2 - 4x + 4a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

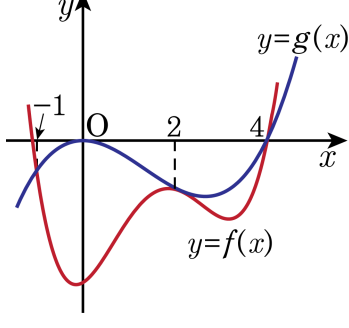
$\alpha + \beta = 4 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{㉠}}$

$\alpha\beta = 4a > 0, a > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{㉡}}$

$\frac{D}{4} = 4 - 4a > 0, a < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{\text{㉢}}$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$ 에서 $0 < a < 1$

10. 사차방정식 $\frac{1}{3}x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 과 삼차방정식 $\frac{1}{3}x^2(x-4)=0$ 을 좌표평면에 함수 $f(x), g(x)$ 로 각각 나타내었다. 이 때, $a+b+c+d$ 의 값은?



- ① -4 ② $-\frac{10}{3}$ ③ -3 ④ $-\frac{7}{3}$ ⑤ -2

해설

$f(x) = g(x)$ 에서 $f(x) - g(x) = 0$
 $F(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면
 $F(x) = 0$ 은 $x = -1, 2$ (중근),
 4 를 근으로 가진다.
 $\therefore F(x) = k(x+1)(x-2)^2(x-4)$
 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$ 이므로 $k = \frac{1}{3}$
 $f(x) = F(x) + g(x)$ 이므로
 $\frac{1}{3}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$
 $= \frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2(x-4) + \frac{1}{3}x^2(x-4)$
양변에 $x = 1$ 을 대입하면
 $\frac{1}{3} + a + b + c + d = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-3) + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (-3)$
 $\therefore a + b + c + d = -\frac{10}{3}$

11. 세 개의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ 이 오직 하나의 공통 실근 α 를 가질 때, $a+b+c+\alpha$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

공통 실근을 α 라 하면

$$\begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \cdots ① \\ b\alpha^2 + c\alpha + a = 0 \cdots ② \\ c\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots ③ \end{cases}$$

$$① + ② + ③ : (a+b+c)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

α 가 실수일 때 $\alpha^2 + \alpha + 1 > 0$

$$\therefore a+b+c=0$$

$$① \times \alpha - ② : a(\alpha^3 - 1) = 0,$$

$a \neq 0$ 이고 α 는 실수이므로 $\alpha = 1$

$$\therefore a+b+c+\alpha = 1$$

12. 두 개의 이차방정식 $x^2 + ax + \frac{1}{a} = 0$ 과 $x^2 + bx + \frac{1}{b} = 0$ 이 공통근을 가질 때, $ab(a+b)$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

- ㉠ -1
- ㉡ 0
- ㉢ 1
- ㉣ 2
- ㉤ a, b 의 값에 따라 달라진다.

해설

공통근을 α 라 하고 두 식에 대입하면

$$\alpha^2 + a\alpha + \frac{1}{a} = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha^2 + b\alpha + \frac{1}{b} = 0 \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠ - ㉡하면

$$\therefore \alpha(a-b) + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0, (a-b)\left(\alpha - \frac{1}{ab}\right) = 0$$

$$a \neq b \text{이므로 } \alpha = \frac{1}{ab}$$

$$\text{이것을 ㉠에 대입하면 } \left(\frac{1}{ab}\right)^2 + a \cdot \frac{1}{ab} + \frac{1}{a} = 0$$

$$1 + a^2b + ab^2 = 1 + ab(a+b) = 0$$

$$\therefore ab(a+b) = -1$$