1. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $kx^2-2(k-4)x+2\ge 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $k\le -2$　② $-1\le k\le 2$　③ $1\le k\le 8$

④ $2\le k\le 8$　⑤ $k\le 8$

해설

x^2의 계수가 미지수 k이므로

i) $k=0$일 때 $8x+2\ge 0$에서 $x\ge -\dfrac{1}{4}$이므로

모든 실수 x에 대하여 성립하는 것은 아니다.

ii) $k\ne 0$일 때 $kx^2-2(k-4)x+2\ge 0$의 해가 모든 실수이려면

$k>0\cdots$ ㉠

$\dfrac{D}{4}=(k-4)^2-2k\le 0,\ k^2-10k+16\le 0,$

$(k-2)(k-8)\le 0 \quad \therefore 2\le x\le 8\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $2\le k\le 8$

i), ii)에서 $2\le k\le 8$이다.

2. 모든 실수 $x,\ y$에 대하여 $\sqrt{mx^2-mx+2}$가 0이 아닌 실수가 될 실수 m의 값의 범위는?

① $0<m<4$ ② $4\le m\le 8$ ③ $0\le m<8$

④ $4<m\le 8$ ⑤ $m\ge 8$

해설

$\sqrt{mx^2-mx+2}$가 0이 아닌 실수가 되려면 $mx^2-mx+2>0$ 이어야 한다.

i) $m=0$일 때 $0\cdot x^2-0\cdot x+2>0$이므로
모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.

ii) $m\ne 0$일 때 $mx^2-mx+2>0$가
모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면
$m>0\cdots$ ㉠
또 이차방정식 $mx^2-mx+2=0$의 판별식을
D라 할 때
$D=(-m)^2-8m<0,\ m(m-8)<0$
$\therefore 0<m<8\cdots$㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<m<8$
i), ii) 에서 $0\le m<8$

3. 집합 A, B, C에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : (A \cap B) \subset (A \cup B)$, $q : A = B$

② $p : A \cap (B \cap C) = A$, $q : A \cup (B \cup C) = B \cup C$

③ $p : A \cup (B \cap C) = A$, $q : A \cap (B \cup C) = B \cup C$

④ $p : A \cup B = A$, $q : B = \phi$

⑤ $p : A \cup (B - A) = B$, $q : A \subset B$

해설

① $(A \cap B) \subset (A \cup B) \Leftarrow A = B$: 필요조건

② $p : A \cap (B \cap C) = A \ \subset (B \cap C)$

$q : A \cup (B \cup C) = B \cup C \Leftrightarrow A \subset (B \cup C)$

$A \subset (B \cap C) \Rightarrow A \subset (B \cup C)$: 충분조건

③ $p : A \cup (B \cap C) = A \Leftrightarrow (B \cap C) \subset A$

$q : A \cap (B \cup C) = B \cup C \Leftrightarrow (B \cup C) \subset A$

$(B \cap C) \subset A \Leftarrow (B \cup C) \subset A$: 필요조건

④ $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

$B \subset A \Leftarrow B = \varnothing$: 필요조건

⑤ $p : A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c) = A \cup B = B$

$q : A \cup (B - A) = B \Leftrightarrow (A \cup B) = B$

$\Leftrightarrow A \subset B \therefore P \Leftrightarrow Q$: 필요충분조건

4. 다음은 a, b 가 실수일 때, 보기 중에서 서로 동치인 것끼리 짝지어 놓은 것이다. 옳지 <u>않은</u> 것은?

보기

㉠ $ab = 0$ ㉡ $a^2 + b^2 = 0$

㉢ $a^2 + b^2 > 0$ ㉣ $a = 0$ 이고 $b = 0$

㉤ $a = 0$ 또는 $b = 0$ ㉥ $a = 0$ 이고 $b \neq 0$

㉦ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ ㉧ $ab = 0$ 이고 $b \neq 0$

㉨ $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$

① ㉠과 ㉤ ② ㉡와 ㉣ ③ ㉢과 ㉦

④ ㉥와 ㉧ ⑤ ㉢과 ㉨

해설

$ab \leftrightarrow a = 0$ 또는 $b = 0$

$a^2 + b^2 \leftrightarrow a = 0$ 이고 $b = 0$

$a^2 + b^2 > 0 \leftrightarrow a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$

$ab = 0$ 이고 $b \neq 0 \leftrightarrow a = 0$ 이고 $b \neq 0$

5. 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $2x+1$이고, $(x-2)^3$으로 나눈 나머지가 x^2-x+6이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-2)^2$으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$ ② $3x-2$ ③ $3x+2$

④ x^2-2x+1 ⑤ x^2-x+6

해설

$f(x)=(x+1)^2A(x)+2x+1$에서 $f(-1)=-1$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^3B(x)+x^2-x+6 \\ &= (x-2)^3B(x)+(x-2)^2+3x+2 \\ &= (x-2)^2\{(x-2)B(x)+1\}+3x+2 \end{aligned}$$

즉 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 ax^2+bx+c라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-2)^2Q(x)+ax^2+bx+c \\ &= (x+1)(x-2)^2Q(x)+a(x-2)^2+3x+2 \end{aligned}$$

$f(-1)=9a-1=-1 \quad \therefore a=0$

$ax^2+bx+c=a(x-2)^2+3x+2$

$\therefore$구하는 나머지는 $3x+2$

6. $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 3이고, 또 (x^2+x+1)로 나누면 나머지가 $2x+4$이다. 이 때, $f(x)$를 x^3-1로 나눈 나머지를 구하면?

① x^2+x+3 ② x^2+2x+3 ③ $-x^2+x+3$

④ $-x^2+2x+3$ ⑤ x^2+3x+1

해설

$f(x)=(x^3-1)Q(x)+ax^2+bx+c$라 하면

$f(x)$를 (x^2+x+1)로 나눈 나머지는 ax^2+bx+c에서 발생한다.

$\therefore\ ax^2+bx+c=a(x^2+x+1)+2x+4\cdots$㉠

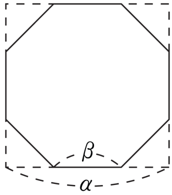
$\therefore\ f(x)=(x^3-1)Q(x)+a(x^2+x+1)+(2x+4)$

그런데 $f(1)=3$이므로 $3a+6=3$

$\therefore$ ㉠에서 $b=1,\ c=3$

따라서, 구하는 나머지는 $-x^2+x+3$

7. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 α인 정사각형의 네 귀퉁이를 잘라 정8각형을 만들고 그 한 변의 길이를 β라 하면, α, β는 이차방정식 $x^2+px+(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근이 된다고 한다. 다음 중 α, p의 값으로 옳은 것은?



① $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = \sqrt{2}-1$

② $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-1$

③ $\alpha = \sqrt{2}+1, \quad p = -\sqrt{2}$

④ $\alpha = \sqrt{2}+1, \quad p = -\sqrt{2}-2$

⑤ $\alpha = \sqrt{2}-1, \quad p = -\sqrt{2}-1$

해설

잘라낸 귀퉁이는 빗변의 길이가 β인 직각이등변삼각형이므로

다른 한 변의 길이는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\beta$이다.

$2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\beta+\beta=\alpha$이므로

$\beta=\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)\alpha$

$\alpha,\ \beta$는 $x^2+px+(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근이므로

$\alpha\beta=(\sqrt{2}-1)\alpha^2=\sqrt{2}+1$에서

$\alpha^2=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$

$\alpha>0$이므로 $\alpha=\sqrt{2}+1$

$\therefore\ p=-(\alpha+\beta)=-\left\{\alpha+(\sqrt{2}-1)\alpha\right\}=-\sqrt{2}-2$

8. 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 두 방정식 $x^2+2ax+b=0$과 $x^2+2bx+a=0$의 두 근의 차가 서로 같을 때, a, b의 관계식은?

① $a+b=0$ ② $a-b-1=0$ ③ $a-b+1=0$

④ $a+b-1=0$ ⑤ $a+b+1=0$

해설

$x^2+2ax+b=0$의 해를 α, β

$x^2+2bx+a=0$의 해를 γ, δ라 하면

$|\alpha-\beta|=|\gamma-\delta|$에서

$(\alpha-\beta)^2=(\gamma-\delta)^2$,

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta$

$(-2a)^2-4b=(-2b)^2-4a$

$\therefore\ (a-b)(a+b+1)=0$

$a\neq b$이므로 $a+b+1=0$

9. 함수 $f(x)=\dfrac{x^2}{4}+a(x\ge 0)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$ 가 서로 다른 두 양의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $0\le a<1$ ② $a\ge 0$ ③ $a<1$

④ $0<a<1$ ⑤ $a<2$

해설

$f(x)=\dfrac{x^2}{4}+a(x\ge 0)$ 와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

따라서, 방정식 $\dfrac{x^2}{4}+a=x$,

즉 $x^2-4x+4a=0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

$x^2-4x+4a=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

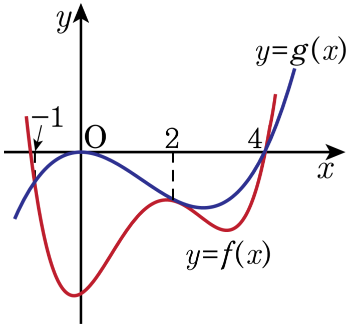
$\alpha+\beta=4>0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta=4a>0,\ a>0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$\dfrac{D}{4}=4-4a>0,\ a<1 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $0<a<1$

10. 사차방정식 $\frac{1}{3}x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 과 삼차방정식 $\frac{1}{3}x^2(x-4)=0$ 을 좌표평면에 함수 $f(x)$, $g(x)$ 로 각각 나타내었다. 이 때, $a+b+c+d$ 의 값은?



① -4　　② $-\frac{10}{3}$　　③ -3　　④ $-\frac{7}{3}$　　⑤ -2

해설

$f(x)=g(x)$ 에서 $f(x)-g(x)=0$

$F(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$F(x)=0$은 $x=-1,\ 2$(중근),

4를 근으로 가진다.

$\therefore\ F(x)=k(x+1)(x-2)^2(x-4)$

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$ 이므로 $k=\frac{1}{3}$

$f(x)=F(x)+g(x)$ 이므로

$\frac{1}{3}x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

$=\frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2(x-4)+\frac{1}{3}x^2(x-4)$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$\frac{1}{3}+a+b+c+d=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 1\cdot(-3)+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(-3)$

$\therefore\ a+b+c+d=-\frac{10}{3}$

11. 세 개의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$이 오직 하나의 공통 실근 α를 가질 때, $a+b+c+\alpha$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

공통 실근을 α라 하면

$$\begin{cases} a\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad \cdots ① \\ b\alpha^2+c\alpha+a=0 \quad \cdots ② \\ c\alpha^2+a\alpha+b=0 \quad \cdots ③ \end{cases}$$

① + ② + ③ : $(a+b+c)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

α가 실수일 때 $\alpha^2+\alpha+1>0$

$\therefore\ a+b+c=0$

① $\times\,\alpha$ − ② : $a(\alpha^3-1)=0$,

$a\neq 0$이고 α는 실수이므로 $\alpha=1$

$\therefore\ a+b+c+\alpha=1$

12. 두 개의 이차방정식 $x^2+ax+\frac{1}{a}=0$과 $x^2+bx+\frac{1}{b}=0$이 공통근을 가질 때, $ab(a+b)$의 값은? (단, $a \neq b$)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ a, b의 값에 따라 달라진다.

해설

공통근을 α라 하고 두 식에 대입하면

$$\alpha^2+a\alpha+\frac{1}{a}=0 \cdots\cdots ①$$

$$\alpha^2+b\alpha+\frac{1}{b}=0 \cdots\cdots ②$$

①−②하면

$$\therefore\ \alpha(a-b)+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0,\ (a-b)\left(\alpha-\frac{1}{ab}\right)=0$$

$a \neq b$이므로 $\alpha=\frac{1}{ab}$

이것을 ①에 대입하면 $\left(\frac{1}{ab}\right)^2+a\cdot\frac{1}{ab}+\frac{1}{a}=0$

$$1+a^2b+ab^2=1+ab(a+b)=0$$

$$\therefore\ ab(a+b)=-1$$