1. x에 관한 부등식 $(a+2b)x+a-b<0$의 해가 $x>1$일 때, x에 관한 부등식 $(a-b)x+2a-b>0$을 풀면?

① $x>\frac{1}{3}$　② $x<\frac{1}{3}$　③ $x>-\frac{4}{3}$
④ $x<-\frac{4}{3}$　⑤ $x>\frac{7}{3}$

해설

$a+2b<0$, $\frac{-(a-b)}{a+2b}=1$
$\therefore\ b=-2a$이므로
$(a-b)x+2a-b=a(3x+4)>0$
$a>0$을 이용하면
$\therefore\ 3x+4>0\ \therefore\ x>-\frac{4}{3}$

2. 이차방정식 $x^2 + (a-b)x + ab = 1$이 a의 어떤 실수값에 대해서도 항상 실근을 갖도록 b의 범위를 정하면?

① $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le b \le \frac{\sqrt{2}}{2}$
② $b \le -\frac{\sqrt{2}}{2},\ b \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$
③ $-\frac{\sqrt{2}}{3} \le b \le \frac{\sqrt{2}}{3}$
④ $b \le -\frac{\sqrt{2}}{3},\ b \ge \frac{\sqrt{2}}{3}$
⑤ $b \le -2,\ b \ge 2$

해설

$x^2 + (a-b)x + ab - 1 = 0$에서
$D = (a-b)^2 - 4(ab-1) \ge 0$
이 식을 a에 관해서 정리하면, $a^2 - 6ba + b^2 + 4 \ge 0$이
부등식이 a에 관계없이 항상 성립하기 위한 조건은 $\frac{D'}{4} \le 0$
이므로
$\frac{D'}{4} = (3b)^2 - (b^2+4) \le 0$
$\therefore\ 2b^2 - 1 \le 0$에서
$(\sqrt{2}b+1)(\sqrt{2}b-1) \le 0$
$-\frac{1}{\sqrt{2}} \le b \le \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\therefore\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \le b \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 어떤 상점에서 스캐너를 한 개에 10만원씩 판매할 때 한 달에 100개가 팔리고, 한 개의 가격을 x만원 인상하면 월 판매량이 $4x$개 줄어드는 것으로 조사되었다. 한 달의 총 판매액이 1200만원 이상이 되도록 하려면 한 개의 가격을 얼마로 하면 좋을까?

① 15만원 이상 20만원 이하 ② 10만원 이상 15만원 이하
③ 5만원 이상 10만원 이하 ④ 4만원 이상 8만원 이하
⑤ 2만원 이상 4만원 이하

해설

$(10+x)(100-4x) \geq 1200,\ 4x^2-60x+200 \leq 0$

$x^2-15x+50=(x-5)(x-10) \leq 0$

$\therefore 5 \leq x \leq 10$

10만원씩 판매할 때보다 5만 원 이상 10만 원 이하 인상해야 하므로 한 개의 가격을 15만 원 이상 20만 원 이하가 되도록 하면 된다.

4. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 0　　⑤ −1

해설

임의의 실수 x 에 대하여
부등식 $2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠
이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0$
㉡식이 항상 성립하기 위하여
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$
$\Rightarrow\ k^2 - 4k - 1 < 0$
$\therefore\ 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
−1 은 속하지 않는다.

5. $-1 \le x \le 1$ 에서 x 에 대한 부등식 $x+a \le x^2 \le 2x+b$ 가 항상 성립할 때, $b-a$ 의 최솟값을 p 라 하자. 이 때, $100p$ 의 값은?

① 275　② 310　③ 325　④ 330　⑤ 335

해설

$x+a \le x^2 \le 2x+b \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x \ge a \\ x^2-2x \le b \end{cases}$

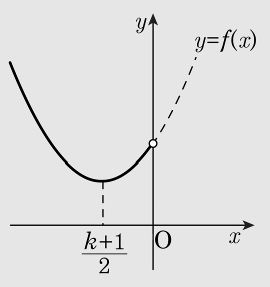
(i) $f(x)=x^2-x$ 라 하면

$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$-1 \le x \le 1$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-\frac{1}{4} \le f(x) \le 2$

즉, $-\frac{1}{4} \le x^2-x \le 2$ 이므로 $a \le -\frac{1}{4}$



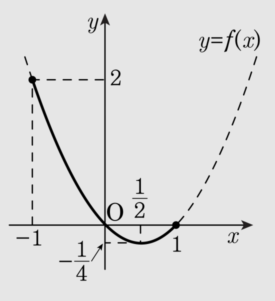
(ii) $g(x)=x^2-2x$ 라 하면

$g(x)=(x-1)^2-1$

$-1 \le x \le 1$ 에서 $y=g(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-1 \le g(x) \le 3$

즉, $-1 \le x^2-2x \le 3$ 이므로 $b \ge 3$



(i), (ii) 에서 $b-a$ 의 최솟값 p 는

$p=3-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{13}{4}$

$\therefore\ 100p=325$

6. $a,\ b,\ c,\ d$는 정수이고, $a < 2b,\ b < 3c,\ c < 4d,\ d < 100$을 만족시킬 때, a의 최댓값은?

① 2367　② 2375　③ 2391　④ 2399　⑤ 2400

해설

a의 최댓값은 $b,\ c,\ d$가 각각 최대일 때이다.
d의 최댓값은 99이고,
$c < 4 \cdot 99 = 396$이므로 c의 최댓값은 395,
$b < 3 \cdot 395 = 1185$ 이므로 b의 최댓값은 1184,
$a < 2 \cdot 1184 = 2368$ 이므로 a의 최댓값은 2367

7. 실수 a, b, c에 대하여 $a < b < c$일 때, 부등식 $|x-a| < |x-b| < |x-c|$를 만족시키는 x 의 범위는?

① $b < x < c$　　② $\frac{1}{2}(b+c) < x$

③ $x < \frac{1}{2}(b+c)$　　④ $\frac{1}{2}(a+b) < x < b$

⑤ $x < \frac{1}{2}(a+b)$

해설

$|x-a| < |x-b|$의 양변을 제곱하면

$x^2 - 2ax + a^2 < x^2 - 2bx + b^2$에서

$2(a-b)x > (a-b)(a+b)$

$\therefore x < \dfrac{a+b}{2} (\because a-b<0) \cdots\cdots ①$

또, $|x-b| < |x-c|$의 양변을 제곱하여

정리하면 $x < \dfrac{b+c}{2}$ $\cdots\cdots$ ②

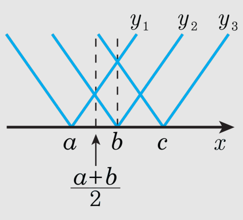
$\therefore$ ①, ②를 동시에 만족하는

x의 범위는 $x < \dfrac{a+b}{2}$

해설

$y_1 = |x-a|$, $y_2 = |x-b|$, $y_3 = |x-c|$라 하고 각각의 그래프를 그리면 그래프에서 $y_1 < y_2 < y_3$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$y = x - a$와 $y = -x + b$의 교점 $x = \frac{1}{2}(a+b)$보다 작을 때이다.



$\therefore$ $x < \frac{1}{2}(a+b)$

8. 부등식 $\frac{1}{3} <= \frac{x^2 - ax + a^2}{x^2 + x + 1} \le 3$이 x의 값에 관계없이 성립하기 위한 실수 a의 값의 범위를 D라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\{a \mid -1 < a < 1\} \subset D$　　② $\{a \mid a = -1,\ 1\} \subset D$

③ $\left\{a \mid -\frac{3}{5} \le a \le 1\right\} \subset D$　　④ $\left\{a \mid a \le -\frac{3}{5}\right\} \subset D$

⑤ $\{a \mid a > 1\} \subset D$

해설

$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$이므로

$3(x^2 + x + 1)$을 주어진 부등식에 곱하면

$x^2 + x + 1 \le 3(x^2 - ax + a^2) \le 9(x^2 + x + 1)$

정리하면, $2x^2 - (3a + 1)x + 3a^2 - 1 \ge 0 \cdots\cdots$ ㉠

$2x^2 + (a + 3)x + 3 - a^2 \ge 0 \cdots\cdots$ ㉡

모든 x에 대하여 ㉠이 성립하려면

$D = (3a + 1)^2 - 8(3a^2 - 1) \le 0$,

$(5a + 3)(a - 1) \ge 0$

$\therefore\ a \le -\frac{3}{5},\ a \ge 1 \cdots\cdots$ ㉢

모든 x에 대하여 ㉡이 성립하려면

$D = (a + 3)^2 - 8(3 - a^2) \le 0$,

$(3a + 5)(a - 1) \le 0$

$\therefore\ -\frac{5}{3} \le a \le 1 \cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통범위를 구하면

$-\frac{5}{3} \le a \le -\frac{3}{5},\ a = 1$

9. 부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha-1<x<\beta+1$일 때, 부등식 $cx^2-bx+a>0$의 해를 α, β를 써서 나타내면? (단, $\alpha>1$)

① $\frac{1}{\beta+1}<x<\frac{1}{\alpha-1}$
② $-\frac{1}{\beta+1}<x<-\frac{1}{\alpha-1}$
③ $\frac{1}{\alpha-1}<x<\frac{1}{\beta+1}$
④ $-\frac{1}{\alpha-1}<x<-\frac{1}{\beta+1}$
⑤ $-\frac{1}{\alpha-1}<x<\frac{1}{\beta+1}$

해설

㉠ $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha-1<x<\beta+1$ 이라면 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0(a<0)$ 에서 두 근은 $\alpha-1,\beta+1$ 이다.

두 근의 합 : $\alpha-1+\beta+1=-\frac{b}{a}$, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

두 근의 곱 : $(\alpha-1)(\beta+1)=\frac{c}{a}$, $\alpha-1<\beta+1$이고, $\alpha>1$이므로 $\frac{c}{a}>0$

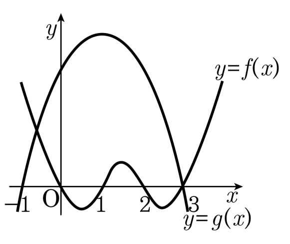
㉡ $cx^2-bx+a>0$에서 $\frac{c}{a}x^2-\frac{b}{a}x+1<0$, $(\alpha-1)(\beta+1)x^2+(\alpha+\beta)x+1<0$

$\{(\alpha-1)x+1\}\{(\beta+1)x+1\}<0$

$\alpha-1<\beta+1$이므로 $-(\alpha-1)>-(\beta+1)$, $-\frac{1}{\alpha-1}<-\frac{1}{\beta+1}$

$\therefore -\frac{1}{\alpha-1}<x<-\frac{1}{\beta+1}$

10. 사차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) \cdot g(x) > 0$의 해는?



① $x < -1$ 또는 $x > 3$

② $0 < x < 1$ 또는 $2 < x < 3$

③ $-1 < x < 0$ 또는 $1 < x < 2$

④ $x < 0$ 또는 $1 < x < 2$

⑤ $0 < x < 1$ 또는 $x > 3$

해설

$f(x) \cdot g(x) > 0$ 이므로
$f(x) > 0$ 이고 $g(x) > 0$ 또는
$f(x) < 0$ 이고 $g(x) < 0$ 이므로
$y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프가
모두 x축 보다 위에 있거나 모두 x축 보다
아래에 있을 때이다.
따라서 $-1 < x < 0$과 $1 < x < 2$에서
두 그래프가 모두 x축 보다 위에 있다.