

1. x 에 관한 부등식 $(a + 2b)x + a - b < 0$ 의 해가 $x > 1$ 일 때, x 에 관한 부등식 $(a - b)x + 2a - b > 0$ 을 풀면?

① $x > \frac{1}{3}$

② $x < \frac{1}{3}$

③ $x > -\frac{4}{3}$

④ $x < -\frac{4}{3}$

⑤ $x > \frac{7}{3}$

해설

$$a + 2b < 0, \quad \frac{-(a - b)}{a + 2b} = 1$$

$\therefore b = -2a$ 이므로

$$(a - b)x + 2a - b = a(3x + 4) > 0$$

$a > 0$ 을 이용하면

$$\therefore 3x + 4 > 0 \quad \therefore x > -\frac{4}{3}$$

2. 이차방정식 $x^2 + (a - b)x + ab = 1$ 이 a 의 어떤 실수값에 대해서도 항상 실근을 갖도록 b 의 범위를 정하면?

① $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq b \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $-\frac{\sqrt{2}}{3} \leq b \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$

② $b \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}, b \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $b \leq -\frac{\sqrt{2}}{3}, b \geq \frac{\sqrt{2}}{3}$

⑤ $b \leq -2, b \geq 2$

해설

$x^2 + (a - b)x + ab - 1 = 0$ 에서

$$D = (a - b)^2 - 4(ab - 1) \geq 0$$

이 식을 a 에 관해서 정리하면, $a^2 - 6ba + b^2 + 4 \geq 0$ 이

부등식이 a 에 관계없이 항상 성립하기 위한 조건은 $\frac{D'}{4} \leq 0$

이므로

$$\frac{D'}{4} = (3b)^2 - (b^2 + 4) \leq 0$$

$$\therefore 2b^2 - 1 \leq 0 \text{에서}$$

$$(\sqrt{2}b + 1)(\sqrt{2}b - 1) \leq 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq b \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq b \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. 어떤 상점에서 스캐너를 한 개에 10만원씩 판매할 때 한 달에 100개가 팔리고, 한 개의 가격을 x 만원 인상하면 월 판매량이 $4x$ 개 줄어드는 것으로 조사되었다. 한 달의 총 판매액이 1200만원 이상이 되도록 하려면 한 개의 가격을 얼마로 하면 좋을까?

- ① 15만원 이상 20만원 이하 ② 10만원 이상 15만원 이하
③ 5만원 이상 10만원 이하 ④ 4만원 이상 8만원 이하
⑤ 2만원 이상 4만원 이하

해설

$$(10 + x)(100 - 4x) \geq 1200, 4x^2 - 60x + 200 \leq 0$$

$$x^2 - 15x + 50 = (x - 5)(x - 10) \leq 0$$

$$\therefore 5 \leq x \leq 10$$

10만원씩 판매할 때보다 5만 원 이상 10만 원 이하 인상해야 하므로 한 개의 가격을 15만 원 이상 20만 원 이하가 되도록 하면 된다.

4. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx + 1)$ 이 곡선 $y = -(x - 2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은?

① 1

② 2

③ 3

④ 0

⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여

$$\text{부등식 } 2(kx + 1) > -(x - 2)^2 + 1 \cdots \textcircled{1}$$

이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.

①식을 정리하면

$$x^2 + 2(k - 2)x + 5 > 0$$

①식이 항상 성립하기 위하여

$$\frac{D}{4} = (k - 2)^2 - 5 < 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 4k - 1 < 0$$

$$\therefore 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$$

이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

5. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 x 에 대한 부등식 $x+a \leq x^2 \leq 2x+b$ 가 항상 성립할 때, $b-a$ 의 최솟값을 p 라 하자. 이 때, $100p$ 의 값은?

① 275

② 310

③ 325

④ 330

⑤ 335

해설

$$x+a \leq x^2 \leq 2x+b \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \geq a \\ x^2 - 2x \leq b \end{cases}$$

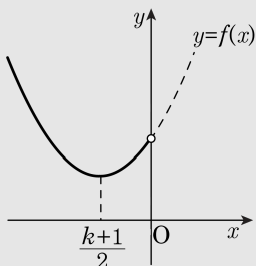
(i) $f(x) = x^2 - x$ 라 하면

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 2$

즉, $-\frac{1}{4} \leq x^2 - x \leq 2$ 이므로 $a \leq -\frac{1}{4}$



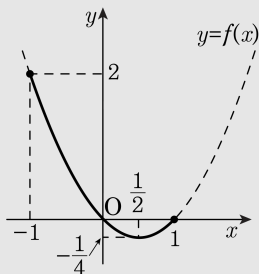
(ii) $g(x) = x^2 - 2x$ 라 하면

$$g(x) = (x-1)^2 - 1$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $y = g(x)$ 의 그래프는

아래 그림과 같으므로 $-1 \leq g(x) \leq 3$

즉, $-1 \leq x^2 - 2x \leq 3$ 이므로 $b \geq 3$



(i), (ii) 에서 $b-a$ 의 최솟값 p 는

$$p = 3 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{4}$$

$$\therefore 100p = 325$$

6. a, b, c, d 는 정수이고, $a < 2b$, $b < 3c$, $c < 4d$, $d < 100$ 을 만족시킬 때, a 의 최댓값은?

- ① 2367 ② 2375 ③ 2391 ④ 2399 ⑤ 2400

해설

a 의 최댓값은 b, c, d 가 각각 최대일 때이다.
 d 의 최댓값은 99이고,
 $c < 4 \cdot 99 = 396$ 이므로 c 의 최댓값은 395,
 $b < 3 \cdot 395 = 1185$ 이므로 b 의 최댓값은 1184,
 $a < 2 \cdot 1184 = 2368$ 이므로 a 의 최댓값은 2367

7. 실수 a, b, c 에 대하여 $a < b < c$ 일 때, 부등식 $|x - a| < |x - b| < |x - c|$ 를 만족시키는 x 의 범위는?

① $b < x < c$

② $\frac{1}{2}(b + c) < x$

③ $x < \frac{1}{2}(b + c)$

④ $\frac{1}{2}(a + b) < x < b$

⑤ $x < \frac{1}{2}(a + b)$

해설

$|x - a| < |x - b|$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2 - 2ax + a^2 < x^2 - 2bx + b^2 \text{에서}$$

$$2(a - b)x > (a - b)(a + b)$$

$$\therefore x < \frac{a + b}{2} (\because a - b < 0) \dots\dots ①$$

또, $|x - b| < |x - c|$ 의 양변을 제곱하여

$$\text{정리하면 } x < \frac{b + c}{2} \dots\dots ②$$

$\therefore$ ①, ②를 동시에 만족하는

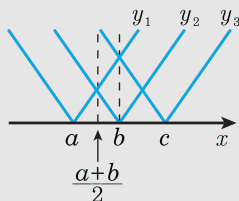
$$x \text{의 범위는 } x < \frac{a + b}{2}$$

해설

$y_1 = |x - a|$, $y_2 = |x - b|$, $y_3 = |x - c|$ 라 하고 각각의 그래프를 그리면 그래프에서 $y_1 < y_2 < y_3$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$y = x - a$ 와 $y = -x + b$ 의 교점 $x = \frac{1}{2}(a + b)$ 보다 작을 때이다.

$$\therefore x < \frac{1}{2}(a + b)$$



8. 부등식 $\frac{1}{3} \leq \frac{x^2 - ax + a^2}{x^2 + x + 1} \leq 3$ 이 x 의 값에 관계없이 성립하기 위한 실수 a 의 값의 범위를 D 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\{a \mid -1 < a < 1\} \subset D$

② $\{a \mid a = -1, 1\} \subset D$

③ $\left\{a \mid -\frac{3}{5} \leq a \leq 1\right\} \subset D$

④ $\left\{a \mid a \leq -\frac{3}{5}\right\} \subset D$

⑤ $\{a \mid a > 1\} \subset D$

해설

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ 이므로}$$

$3(x^2 + x + 1)$ 을 주어진 부등식에 곱하면

$$x^2 + x + 1 \leq 3(x^2 - ax + a^2) \leq 9(x^2 + x + 1)$$

$$\text{정리하면, } 2x^2 - (3a + 1)x + 3a^2 - 1 \geq 0 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$2x^2 + (a + 3)x + 3 - a^2 \geq 0 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

모든 x 에 대하여 $\textcircled{\text{㉠}}$ 이 성립하려면

$$D = (3a + 1)^2 - 8(3a^2 - 1) \leq 0,$$

$$(5a + 3)(a - 1) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -\frac{3}{5}, a \geq 1 \dots\dots \textcircled{\text{㉢}}$$

모든 x 에 대하여 $\textcircled{\text{㉡}}$ 이 성립하려면

$$D = (a + 3)^2 - 8(3 - a^2) \leq 0,$$

$$(3a + 5)(a - 1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{5}{3} \leq a \leq 1 \dots\dots \textcircled{\text{㉣}}$$

$\textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉣}}$ 의 공통범위를 구하면

$$-\frac{5}{3} \leq a \leq -\frac{3}{5}, a = 1$$

9. 부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\alpha - 1 < x < \beta + 1$ 일 때, 부등식 $cx^2 - bx + a > 0$ 의 해를 α, β 를 써서 나타내면? (단, $\alpha > 1$)

① $\frac{1}{\beta+1} < x < \frac{1}{\alpha-1}$

② $-\frac{1}{\beta+1} < x < -\frac{1}{\alpha-1}$

③ $\frac{1}{\alpha-1} < x < \frac{1}{\beta+1}$

④ $-\frac{1}{\alpha-1} < x < -\frac{1}{\beta+1}$

⑤ $-\frac{1}{\alpha-1} < x < \frac{1}{\beta+1}$

해설

㉠ $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\alpha - 1 < x < \beta + 1$ 이라면 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ ($a > 0$) 에서 두 근은 $\alpha - 1, \beta + 1$ 이다.

두 근의 합 : $\alpha - 1 + \beta + 1 = -\frac{b}{a}, \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

두 근의 곱 : $(\alpha - 1)(\beta + 1) = \frac{c}{a}, \alpha - 1 < \beta + 1$ 이고, $\alpha > 1$

이므로 $\frac{c}{a} > 0$

㉡ $cx^2 - bx + a > 0$ 에서 $\frac{c}{a}x^2 - \frac{b}{a}x + 1 < 0, (\alpha - 1)(\beta + 1)x^2 +$

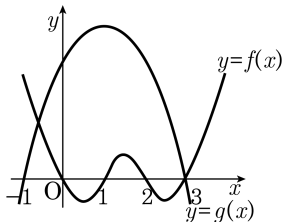
$(\alpha + \beta)x + 1 < 0$

$\{(\alpha - 1)x + 1\} \{(\beta + 1)x + 1\} < 0$

$\alpha - 1 < \beta + 1$ 이므로 $-(\alpha - 1) > -(\beta + 1), -\frac{1}{\alpha - 1} < -\frac{1}{\beta + 1}$

$\therefore -\frac{1}{\alpha - 1} < x < -\frac{1}{\beta + 1}$

10. 사차함수 $f(x)$ 와 이차함수 $g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) \cdot g(x) > 0$ 의 해는?



- ① $x < -1$ 또는 $x > 3$
- ② $0 < x < 1$ 또는 $2 < x < 3$
- ③ $-1 < x < 0$ 또는 $1 < x < 2$
- ④ $x < 0$ 또는 $1 < x < 2$
- ⑤ $0 < x < 1$ 또는 $x > 3$

해설

$f(x) \cdot g(x) > 0$ 이므로

$f(x) > 0$ 이고 $g(x) > 0$ 또는

$f(x) < 0$ 이고 $g(x) < 0$ 이므로

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프가

모두 x 축 보다 위에 있거나 모두 x 축 보다 아래에 있을 때이다.

따라서 $-1 < x < 0$ 과 $1 < x < 2$ 에서

두 그래프가 모두 x 축 보다 위에 있다.