1. 두 직선 $(a-2)x+3y-1=0$, $ax-y+3=0$이 평행할 때의 a값이 $\frac{1}{n}$ 이다. n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ 에서

$\frac{a-2}{a} = \frac{3}{-1} \neq \frac{-1}{3}$ $(a \neq 0)$

$\therefore\ 3a = -a + 2$

$\therefore\ a = \frac{1}{2}$

$\therefore\ n = 2$

2. 점 $(3, -3)$와 직선 $x - y - 4 = 0$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

$$d = \frac{|3 \times 1 + (-3) \times (-1) + (-4)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

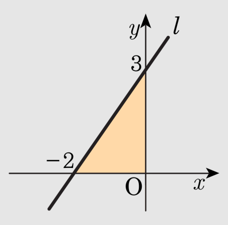
3. 직선 $3x-2y+6=0$이 x 축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x-2y+6=0$을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$

4. $ac < 0,\ bc > 0$ 일 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 이 나타내는 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답: 사분면

▷ 정답: 제 2사분면

해설

$b \neq 0$ 이므로,

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots$ ㉠

$ac < 0,\ bc > 0$ 에서 $ac \cdot bc < 0$

$\therefore\ abc^2 < 0$ 즉, $ab < 0$

$ab < 0$ 에서 기울기 $-\frac{a}{b} > 0$

$bc > 0$ 에서 y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$

따라서 ㉠은 제 2 사분면을 지나지 않는다.

5. 두 직선 $x+y=4$, $2x-y+1=0$의 교점과 점 $(2,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $y=4x+7$　② $y=4x-7$　③ $y=-4x+7$
④ $y=-4x-7$　⑤ $y=-x+7$

해설

두 직선의 방정식

$$\begin{cases} x+y=4 & \cdots ㉠ \\ 2x-y+1=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$ 을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=3$

즉, 교점 $(1,\ 3)$ 과 $(2,\ -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{-1-3}{2-1}(x-1)$$

즉, $y=-4x+7$

6. 두 직선 $3x-2y-4=0$, $x+2y-4=0$ 의 교점과 점 $(1,-4)$ 를 지나는 직선의 방정식은?

① $5x-y-9=0$　　② $5x+y-9=0$
③ $x-2y-1=0$　　④ $2x-3y-1=0$
⑤ $2x-y+3=0$

해설

$$\begin{cases} 3x-2y-4=0 \cdots ㉠ \\ x+2y-4=0 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ + ㉡ : $x=2,\ y=1$

∴ 교점 : $(2,\ 1)$

∴ 구하는 직선은 $y-1=\dfrac{-4-1}{1-2}(x-2)=5(x-2)$

∴ $5x-y-9=0$

7. 함수 $f(x) = ax + 1$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하면?

① $(1, 0)$ ② $(1, 1)$ ③ $(0, 1)$
④ $(-1, 0)$ ⑤ $(0, -1)$

해설

함수 $f(x) = ax + 1$ 의 그래프는
a 의 값에 관계없이 점$(0,\ 1)$ 을 지나는 직선이다.

8. 직선 $(a+2)x-y-a+b=0$ 이 x 축의 양의 방향과 $45°$ 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y=(a+2)x-a+b$ 에서

기울기$=a+2=\tan 45°=1$

$\therefore\ a=-1$

y 절편 $-a+b=4$

$\therefore\ b=3$

$\therefore\ a+b=2$

9. 다음 중 직선의 방정식을 바르게 구한 것을 모두 고르면?

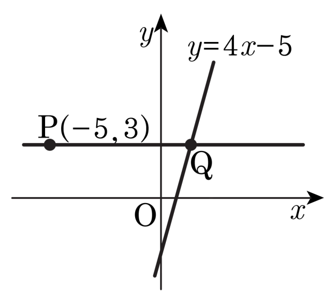
㉠ 점 $(0, 5)$를 지나고, x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$인 직선 $\rightarrow y = x + 5$
㉡ 두 점 $\mathrm{A}(1, -1)$, $\mathrm{B}(-1, 3)$을 지나는 직선 $\rightarrow y = -2x + 1$
㉢ x 절편이 2 , y절편이 -2인 직선 $\rightarrow y = 2x - 2$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ (기울기)$= \tan 60° = \sqrt{3}$ 이고 y절편이 5이므로 $y = \sqrt{3}x + 5$
㉡ $y + 1 = \dfrac{3 - (-1)}{-1 - 1}(x - 1)$, $\therefore\ y = -2x + 1$
㉢ $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-2} = 1$, $\therefore\ y = x - 2$
따라서 직선의 방정식을 바르게 구한 것은 ㉡뿐이다.

10. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $P(-5, 3)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 일차함수 $y = 4x - 5$ 의 그래프와 만나는 점을 Q 라 한다. $\overline{PQ}$ 의 길이는?



① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

해설

점 P 를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은 $y = 3$ 이다.
점 Q의 y좌표가 3이므로
$y = 4x - 5$에 $y = 3$을 대입하면 $3 = 4x - 5$
$\therefore x = 2$
따라서 점 Q의 좌표는 $(2,\ 3)$ 이다.
$\therefore \overline{PQ} = 2 - (-5) = 7$

11. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$ $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$가 일직선 위에 있을 때, k의 값의 곱을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2+7k+12=0$

$\therefore$ k의 값의 곱은 12이다.

12. 두 점 A(2, 1), B(4, -3) 를 지나는 직선에 수직이고 y 절편이 2 인 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

직선 $y = ax + b$ 는 두 점 A(2, 1), B(4, -3) 를 지나는 직선에 수직이므로,

$\frac{1-(-3)}{2-4} \cdot a = -1$ 이고, $-2a = -1$ 이다.

$\therefore\ a = \frac{1}{2}$

또, y 절편이 2 이므로 $b = 2$ 이고,

따라서 $a + b = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

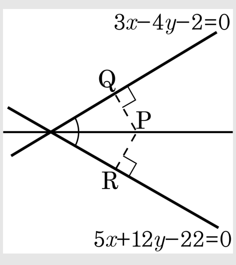
13. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$
즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는
$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면
$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서
기울기가 양이므로
$\therefore\ x-8y+6=0$
$\therefore a+b+c=-1$

14. 점 A$(6,\ 2)$와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}$를 $1\ :\ 3$으로 내분하는 점의 자취는?

① $x-2y-8=0$ ② $x+2y-8=0$ ③ $x-2y+8=0$

④ $x+2y+8=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

P $(a,\ b)$라 하면 $a+2b-2=0 \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AP}}$의 $1\ :\ 3$ 내분점을 Q $(x,\ y)$라 하면

$\mathrm{Q}(x,\ y)=\left(\frac{a+18}{1+3},\frac{b+6}{1+3}\right)$

$x=\frac{a+18}{1+3}$, $y=\frac{b+6}{1+3}$

$a=4x-18$, $b=4y-6$

㉠에 대입하면,

$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$

15. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{A}(-2,3)$과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x+2y-3=0$　② $2x+3y+1=0$

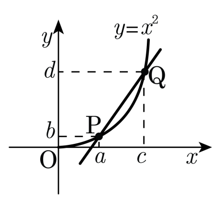
③ $4x-3y+1=0$　④ $x-4y-3=0$

⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$의 중점의 좌표를
$\mathrm{P}(X,\ Y)$ 라 하면,
$\mathrm{P}(X,\ Y)=\mathrm{P}\left(\frac{x-2}{2},\ \frac{y+3}{2}\right)$ 이므로
$X=\frac{x-2}{2}$, $Y=\frac{y+3}{2}$
$\therefore\ x=2X+2$, $y=2Y-3$
이것을 $2x+y-4=0$ 에 대입하면
$2(2X+2)+(2Y-3)-4=0$
$4X+2Y-3=0$
$\therefore\ 4x+2y-3=0$

16. 함수 $y = x^2$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$ 에 대하여 $\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{d}}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ의 기울기는?(단, $0 < a < c$)



① $\dfrac{5}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

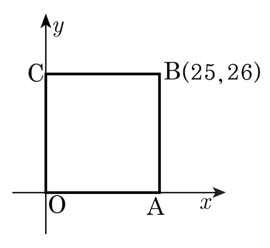
해설

점 $\mathrm{P}(a,b)$, $\mathrm{Q}(c,d)$ 는 $y = x^2$ 의 그래프 위의 점이므로 $b = a^2$, $d = c^2$

즉, $a = \sqrt{b}$, $c = \sqrt{d}$ ($\because$ $0 < a < c$)

$$(\overline{\mathrm{PQ}} \text{ 의 기울기}) = \frac{d-b}{c-a} = \frac{c^2-a^2}{c-a} = \frac{(c-a)(c+a)}{c-a} = c+a = \sqrt{d}+\sqrt{b} = 2$$

17. 좌표평면 위에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 한다. 직선 $y=\frac{3}{8}x+1$은 아래 그림과 같은 직사각형 OABC 내부(경계선 제외)의 격자점을 모두 몇 개 지나는가?



① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$y=\frac{3}{8}x+1$에서 x가 8의 배수이면 y도 정수가 된다.

$0<x<25$, $0<y<26$에서 조건을 만족하는 정수의 순서쌍을 구하면

$(8,\ 4)$, $(16,\ 7)$, $(24,\ 10)$으로 모두 3개의 격자점을 지난다.

18. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의조건은?

$$3x+y+2=0,\ x+3y+k=0,\ 2x-y+3=0$$

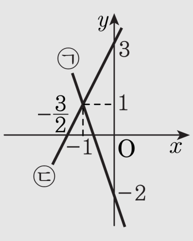
① $k \neq -2$　　② $k \neq -3$　　③ $k \neq -4$

④ $k \neq -7$　　⑤ $k \neq -11$

해설

$3x+y+2=0 \cdots$ ㉠
$x+3y+k=0 \cdots$ ㉡ 일 때,
$2x-y+3=0 \cdots$ ㉢

다음 그림과 같이
세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.

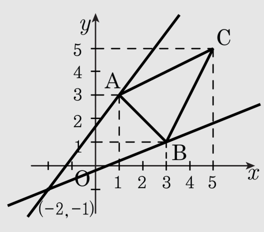


㉠, ㉡, ㉢ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.
㉠과 ㉢을 연립하여 교점의 좌표를 구하면$(-1,\ 1)$ 이다.
이 점을 ㉡에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1+3+k \neq 0$,　$\therefore\ k \neq -2$

19. 세 점 A(1, 3), B(3, 1), C(5, 5) 를 꼭지점으로 하는 △ABC 와 직선 $kx-y+2k-1=0$ 이 만난다. 상수 k 의 최대값을 M , 최소값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설



직선의 방정식 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ 은
k 의 값에 관계없이 항상 두 직선
$ax+by+c=0$ 과 $a'x+b'y+c'=0$
의 교점을 지난다.
그림과 같이 직선 $kx-y+2k-1=0$
즉 $y=k(x+2)-1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점$(-2,\ -1)$ 을 지나므로
이 직선이 $\overline{\mathrm{AB}}$ 와 만날 때, 삼각형과 만난다.

1) 점 A 를 지날 때, $3=k(1+2)-1$, $k=\frac{4}{3}$

2) 점 B 를 지날 때, $1=k(3+2)-1$, $k=\frac{2}{5}$

따라서 $\frac{2}{5}\le k\le\frac{4}{3}$ 일 때, 주어진 직선은 삼각형과 만난다.

$\therefore \frac{M}{m}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{5}}=\frac{10}{3}$

20. 서로 다른 두 직선 $2x - ay - 2 = 0$, $x - (a-3)y - 3 = 0$이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$　② $\dfrac{\sqrt{7}}{5}$　③ $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$　④ $\dfrac{3}{5}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

해설

$\begin{cases} 2x - ay - 2 = 0 \\ x - (a-3)y - 3 = 0 \end{cases}$ 정리하면

$\begin{cases} y = \dfrac{2}{a}x - \dfrac{2}{a} \\ y = \dfrac{1}{a-3}x - \dfrac{3}{a-3} \end{cases}$ 평행하므로

$\dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{a-3}$

$\therefore\ a = 6$ 대입하면

$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$

$x - 3y - 1 = 0$ 위의 점 $(1,\ 0)$ 과 $x - 3y - 3 = 0$ 과의 거리는

$\therefore\ \dfrac{|1-3|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \dfrac{2\sqrt{10}}{10} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

21. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 원점에서부터의 거리가 1 인 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2　　② -1 또는 2　　③ 4

④ -2 또는 4　　⑤ 0 또는 4

해설

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$
의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x-2y+3+k(x-y+1)=0$ 으로
나타낼 수 있다. 이 식을 정리하면
$(1+k)x+(-2-k)y+(3+k)=0 \cdots$ ①
원점에서 이 직선까지의 거리가 1 이므로

$$\frac{3+k}{\sqrt{(1+k)^2+(-2-k)^2}}=1$$

양변에 제곱하여 정리하면
$(3+k)^2=(1+k)^2+(-2-k)^2$, $k^2=4$
$\therefore k=\pm 2$
이것을 ①에 대입하여 정리하면
$3x-4y+5=0$ 또는 $x-1=0$
따라서 $a+b+c$ 는 0 또는 4