1. 이차함수 $y = -3x^2 + 1$ 의 그래프는 $y = -3x^2 - 5$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 얼마만큼 평행이동한 것인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$y = -3x^2 + 1$ 의 그래프는 $y = -3x^2 - 5$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $1 - (-5) = 6$ 만큼 평행이동한 것이다.

2. 이차함수 $y=(x-3)^2-6$ 의 그래프를 x 축의 음의 방향으로 4 만큼, y 축의 양의 방향으로 8 만큼 평행이동한 포물선의 식은?

① $y=(x+4)^2$ ② $y=x^2+8$

③ $y=(x+1)^2-2$ ④ $y=(x+1)^2+2$

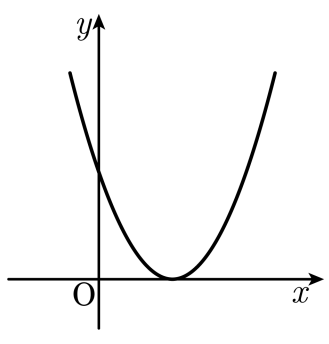
⑤ $y=(x-1)^2+2$

해설

$y=(x-3+4)^2-6+8$

$\therefore y=(x+1)^2+2$

3. 이차함수 $y = a(x - p)^2$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, a, p 의 부호는?



① $a > 0$, $p > 0$ ② $a > 0$, $p < 0$ ③ $a < 0$, $p = 0$

④ $a < 0$, $p < 0$ ⑤ $a < 0$, $p > 0$

해설

이차함수 그래프의 모양이 아래로 볼록이므로 $a > 0$ 이다.
또한, 꼭짓점의 좌표는 $(p,\ 0)$ 이고 x 축의 오른쪽에 있으므로 $p > 0$ 이다.
따라서 $a > 0,\ p > 0$ 이다.

4. 이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 식은?

① $y = -x^2 + 4x + 1$　② $y = x^2 - 4x + 1$

③ $y = -x^2 + 4x - 7$　④ $y = x^2 + 4x - 3$

⑤ $y = -x^2 + 4x - 3$

해설

$y = -(x-2)^2 - 3 = -x^2 + 4x - 7$

5. 다음 중 꼭짓점의 좌표 $(2,\ -6)$, 대칭축의 방정식 $x=2$, y 축과의 교점의 좌표 $(0,\ -10)$ 인 이차함수는?

① $y=x^2-2x-3$ ② $y=x^2-4x+5$

③ $y=-x^2-2x+3$ ④ $y=-x^2+4x-10$

⑤ $y=2x^2-4x+5$

해설

$y=a(x-2)^2-6$ 에 $(0,-10)$ 을 대입한다.
$a=-1$
$\therefore y=-x^2+4x-10$

6. $x = -2$ 일 때, 최댓값 3을 가지고, 점 $(0, -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y = -\frac{3}{2}(x-2)^2 + 3$ ② $y = -\frac{3}{2}(x+2)^2 + 3$

③ $y = -\frac{2}{3}(x-2)^2 + 3$ ④ $y = -\frac{2}{3}(x+2)^2 + 3$

⑤ $y = -2x^2 + 3$

해설

$x = -2$ 일 때, 최댓값 3을 가진다는 것은 그래프가 위로 볼록하고, $y = a(x+2)^2 + 3$ 의 형태임을 의미한다.
이 중 $(0, -3)$ 을 지나면,

$-3 = 4a + 3$

$4a = -6$

$a = \frac{3}{2}$

$\therefore y = -\frac{3}{2}(x+2)^2 + 3$

7. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 원점$(0,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

② y축에 대하여 대칭이다.

③ a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 넓어진다.

④ $a > 0$일 때 아래로 볼록, $a < 0$일 때 위로 볼록하다.

⑤ $y = ax^2$과 $y = -ax^2$의 그래프는 x축에 대하여 서로 대칭이다.

해설

$y = ax^2$ 의 그래프는 다음의 기본성질을 갖는다.
꼭짓점은 $(0, 0)$, 대칭축은 y축, 즉 $x = 0$이다.
$a > 0$이면 아래로 볼록, $a < 0$이면 위로 볼록하다.
$|a|$이 작을수록 포물선의 폭이 넓다.
$y = -ax^2$와 x축에 대하여 대칭이다.
따라서 ③이 옳지 않다.

8. 이차함수 $y = -4x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동할 때, 대칭축 $x = a$ 는 제 2, 3 사분면을 지난다. 다음 보기 중 a 의 값이 될 수 있는 것을 모두 찾아 기호로 써라.

보기

㉠ $a = -5$　　㉡ $a = 2$

㉢ $a = -3$　　㉣ $a = 4$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉢

해설

이차함수의 그래프가 왼쪽으로 평행이동해야 하므로 $a < 0$ 이 되어야 한다. 따라서 ㉠, ㉢이다.

9. 포물선 $y = 3x^2 + 5$ 과 x 축에 대하여 대칭인 포물선의 식은?

① $y = -3x^2 + 5$ ② $y = 3x^2 - 5$ ③ $y = -3x^2 - 5$

④ $y = 3x^2$ ⑤ $y = 3x^2 + 10$

해설

$y = ax^2 + q$ 와 x 축에 대하여 대칭을 이루는 포물선의 식은 $y = -ax^2 - q$ 이다.

10. 다음 보기의 이차함수의 그래프 중 $y=-2x^2$ 의 그래프를 평행이동하여 완전히 포갤 수 있는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y=-2x^2+2$

㉡ $y=2x^2-3$

㉢ $y=-2(x+1)^2$

㉣ $y=x^2+3x+3-3(x-1)(x+1)$

㉤ $y=\dfrac{6x^2-2}{3}$

① ㉠,㉡,㉢ ② ㉠,㉡,㉢ ③ ㉠,㉢,㉣

④ ㉠,㉢,㉤ ⑤ ㉠,㉣,㉤

해설

$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프에서 a 의 값이 같으면 평행 이동하여 두 이차 함수의 그래프를 완전히 포갤 수 있다.
따라서 $a=-2$ 인 것은 ㉠,㉢,㉣이다.

11. 꼭짓점의 좌표가 $(-2,\ 3)$ 이고, 한 점 $(1,\ -6)$ 을 지나는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식이 $y = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

① -2 ② 2 ③ -6 ④ 6 ⑤ 1

해설

$y = a(x+2)^2 + 3$ 이 점 $(1,\ -6)$ 을 지나므로
$-6 = a(1+2)^2 + 3,\ a = -1$ 이다.
$\therefore\ y = -(x+2)^2 + 3 = -x^2 - 4x - 1$
$\therefore\ a + b + c = -1 - 4 - 1 = -6$

12. 다음 중 x 축과의 교점이 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 이고 한 점 $(0,\ -2)$ 를 지나는 포물선의 식은?

① $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$　② $y = 3x^2 - 3x - 6$

③ $y = -x^2 + 6x - 8$　④ $y = x^2 + 6x - 8$

⑤ $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2$

해설

$y = a(x+2)(x-2)$ 이고, $(0,\ -2)$ 를 지난다.

$-2 = -4a$

$\therefore\ a = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}(x+2)(x-2) = \frac{1}{2}(x^2 - 4)$

$\therefore\ y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

13. 이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 의 최솟값이 5 일 때, k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$y = (x+1)^2 + k - 1$
최솟값 $k - 1 = 5$
$\therefore k = 6$

14. 합이 16 인 두 수가 있다. 이 두수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 50 ② 62 ③ 64 ④ 79 ⑤ 83

해설

두 수를 각각x, $16-x$ 라고 하면

$y = x(16-x)$

$= -x^2 + 16x$

$= -(x^2 - 16x + 64 - 64)$

$= -(x-8)^2 + 64$

$x = 8$ 일 때, 최댓값 64 을 갖는다.

15. 이차함수 $y = x^2 + ax - b$ 의 꼭짓점이 x 축 위에 있을 때, $\frac{b}{a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{1}{4}$

해설

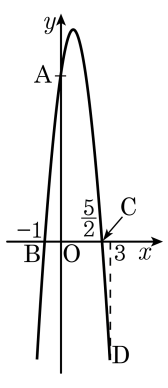
$y = x^2 + ax - b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - b$,

꼭짓점 $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4} - b\right)$ 가 x 축 위에 있으므로 $-\frac{a^2}{4} - b = 0$,

$b = -\frac{a^2}{4}$,

$\therefore\ \frac{b}{a^2} = b \times \frac{1}{a^2} = -\frac{a^2}{4} \times \frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}$

16. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. $\triangle ABC$ 의 넓이가 $\frac{35}{2}$ 일 때, $\triangle BCD$ 의 넓이를 구하여라. (단, A, B, C, D는 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 위의 점이다.)



▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

$A(0,\ c),\ B(-1,\ 0),\ C\left(\frac{5}{2},\ 0\right),\ D(3,\ p),\ \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{5}{2}\right) \times c = \frac{35}{2},\ c = 10$

$A(0,\ 10)$

$y = ax^2 + bx + c = a(x+1)\left(x - \frac{5}{2}\right),$

$-\frac{5}{2}a = 10,\ a = -4$

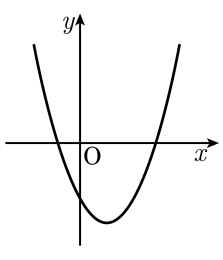
$y = -4(x+1)\left(x - \frac{5}{2}\right) = -4x^2 + 6x + 10,$

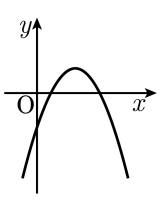
$y = -4x^2 + 6x + 10$ 에 $D(3,\ p)$ 를 대입하면

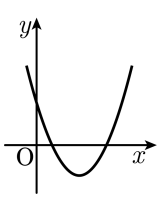
$p = -36 + 18 + 10 = -8,\ D(3,\ -8)$

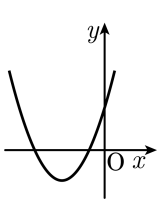
$\therefore\ \triangle BCD = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{5}{2}\right) \times 8 = 14$ 이다.

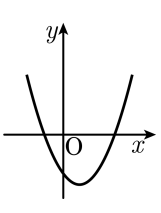
17. 이차함수 $y = ax^2 + bx - c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $y = cx^2 + bx + a$ 의 그래프는?

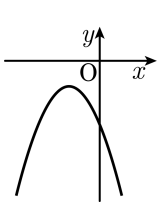


① 

② 

③ 

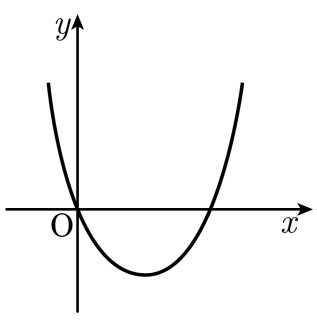
④ 

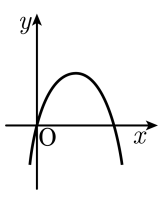
⑤ 

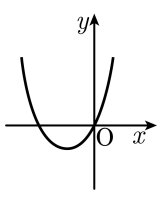
해설

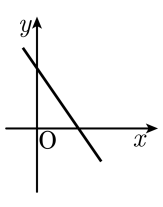
$y = ax^2 + bx - c$ 의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a > 0$ 이다.
축이 y 축의 오른쪽에 있으므로 a 와 b 의 부호는 반대이다.
따라서, $b < 0$ 이다.
y 절편이 음수이므로 $-c < 0,\ c > 0$ 이다.
$y = cx^2 + bx + a$ 에서
$c > 0$ 이므로 아래로 볼록한 그래프이다.
$b < 0$ 이므로 축은 y 축의 오른쪽에 있다.
$a > 0$ 이므로 y 절편은 양수이다.
따라서 구하는 그래프는 ②이다.

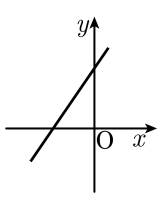
18. $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $y = cx^2 + bx + a$ 의 그래프는?

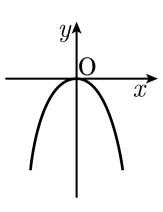


① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

주어진 그래프에서 y 절편이 0 이므로 $c = 0$, 아래로 볼록이므로 $a > 0$, 축 $x = -\dfrac{b}{2a}$ 가 양이므로 $b < 0$

$\therefore y = cx^2 + bx + a \leftrightarrow y = bx + a$ 에서 기울기가 음이고 y 절편이 양인 직선을 구하면 된다.

19. 이차함수 $y = \frac{4}{3}x^2$ 의 그래프와 직선 $y = 48$ 사이에 둘러싸인 도형 내부의 좌표 중, x, y좌표의 값이 모두 자연수인 점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 170 개

해설

$y = \frac{4}{3}x^2$ 의 그래프와 직선 $y = 48$ 이 만나는 두 점은 각각 $(-6, 48), (6, 48)$

둘러싸인 부분의 x 좌표의 범위는 $-6 \le x \le 6$ 이므로 이 범위 안의 자연수는 $1, 2, \cdots, 6$ 의 6 개가 있다.

(1) $y = 16$ 위에 있는 자연수인 점은 $(1, 16), (2, 16), \cdots (6, 16)$ 로 6 개가 있다.

(2) $y = \frac{4}{3}x^2$ 의 그래프 위에 있는 자연수인 점은 $(3, 12)(6, 48)$ 의 2 개가 있다.

따라서

x 좌표가 6 일 때 : 1 개

x 좌표가 5 일 때 :

y 좌표는 34 부터 48 까지이므로 15 개

x 좌표가 4 일 때 :

y 좌표는 22 부터 48 까지이므로 27 개

x 좌표가 3 일 때 :

y 좌표는 12 부터 48 까지이므로 37 개

x 좌표가 2 일 때 :

y 좌표는 6 부터 48 까지이므로 43 개

x 좌표가 1 일 때 :

y 좌표는 2 부터 48 까지이므로 47 개

$\therefore\ 1 + 15 + 27 + 37 + 43 + 47 = 170$ (개)

20. $2x+y=a+1$, $x+2y=5(a-2)$ 를 만족하는 x, y 에 대하여 x^2+y^2 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{5}{2}$

해설

$2x+y=a+1 \cdots$ ㉠
$x+2y=5(a-2) \cdots$ ㉡
㉠ $\times 2-$ ㉡ 을 하면
$3x=-3a+12$, $x=-a+4$
$x=-a+4$ 를 ㉠에 대입하면
$y=3a-7$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (-a+4)^2+(3a-7)^2 \\ &= a^2-8a+16+9a^2-42a+49 \\ &= 10a^2-50a+65 \\ &= 10\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{2} \end{aligned}$$

∴ 최솟값 $\frac{5}{2}$