1. 이차함수 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면 $(3,\ a)$ 를 지날 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-6$

해설

y 축으로 -3 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{3}x^2-3$ 이고

이것이 $(3,\ a)$ 를 지나므로

$\therefore a=-\frac{1}{3}(3)^2-3=-6$

2. 평행이동에 의하여 포물선 $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ 의 그래프와 완전히 포개어지지 않는 것은?

① $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$

② $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$

③ $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

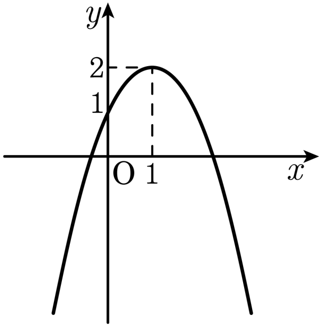
④ $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$

⑤ $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

해설

이차항의 계수가 같은 것을 찾는다.

3. 다음 그래프는 이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 평행이동한 것이다. 평행이동한 그래프의 식을 구하면?



① $y = -x^2 + 1$

② $y = -x^2 + 2$

③ $y = -(x-1)^2$

④ $y = -(x-1)^2 + 2$

⑤ $y = -(x+1)^2 + 2$

해설

$y = -x^2$ 을 x 축으로 1 만큼 y 축 방향으로 2 만큼 평행이동했으므로

$y = -(x-1)^2 + 2$ 이다.

4. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점이 $(-1,\ 4)$ 이고, y 절편이 6 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 4)$ 이므로

$y = a(x+1)^2+4$ 이고, y 절편이 6 이므로 $6 = a(0+1)^2+4,\ a = 2$ 이다.

$y = 2(x+1)^2 + 4 = 2x^2 + 4x + 6$

$a = 2, b = 4, c = 6$

$\therefore a + b + c = 12$

5. 이차함수 $y = -(x-1)(x+3)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned} y &= -(x-1)(x+3) \\ &= -x^2 - 2x + 3 \\ &= -(x+1)^2 + 4 \end{aligned}$$

$x = -1$ 일 때, 최댓값 4 를 가진다.

6. $x=-2$ 일 때, 최댓값 3을 가지고, 점 $(0,\ -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y=-\frac{3}{2}(x-2)^2+3$

② $y=-\frac{3}{2}(x+2)^2+3$

③ $y=-\frac{2}{3}(x-2)^2+3$

④ $y=-\frac{2}{3}(x+2)^2+3$

⑤ $y=-2x^2+3$

해설

$x=-2$ 일 때, 최댓값 3을 가진다는 것은 그래프가 위로 볼록하고, $y=a(x+2)^2+3$ 의 형태임을 의미한다.
이 중 $(0,\ -3)$ 을 지나면,

$-3=4a+3$

$4a=-6$

$a=\frac{3}{2}$

$\therefore\ y=-\frac{3}{2}(x+2)^2+3$

7. 함수 $f(x)=3x^2-2x-1$ 에서 $f(a)=0$ 일 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$f(a)=0$ 이므로

$3a^2-2a-1=0, \quad (3a+1)(a-1)=0$

$\therefore \; a=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $a=1$

한편, $a>0$ 이므로 $a=1$ 이다.

8. 이차함수 $y=-2x^2$ 의 그래프가 제 3사분면 위의 점 $(a,\ 3a)$ 를 지날 때, $2a$ 의 값은?

① -3 ② 3 ③ -4 ④ 4 ⑤ -2

해설

$3a=-2a^2$, $2a\left(a+\frac{3}{2}\right)=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=-\frac{3}{2}$

따라서 점 $(a,\ 3a)$ 가 제 3 사분면 위의 점이므로 $2a=2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=$ -3 이다.

9. $y=-x^2$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 다음 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 방정식은?

① $y=-x^2+4x-4$

② $y=x^2-4x+4$

③ $y=-x^2-4x-4$

④ $y=-x^2-4x+4$

⑤ $y=x^2+4x-4$

해설

x축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 $y=-(x-2)^2$

y 축에 대하여 대칭이동시키면 $y=-(-x-2)^2$

$$=-(x^2+4x+4)$$

$$=-x^2-4x-4$$

10. 이차함수 $y = 3x^2 - 12x + 1$ 와 $y = 2x^2 + px + q$ 와 꼭짓점이 일치할 때, $p - q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 - 12x + 1 \\ &= 3(x^2 - 4x + 4 - 4) + 1 \\ &= 3(x - 2)^2 - 11 \end{aligned}$$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -11)$ 이고,

$y = 2x^2 + px + q$ 와 꼭짓점이 일치하므로

$$\begin{aligned} y &= 2(x - 2)^2 - 11 \\ &= 2x^2 - 8x - 3 \end{aligned}$$

이므로 $p = -8,\ q = -3$ 이다.

$\therefore p - q = -5$

11. 다음 보기의 이차함수의 그래프 중 $y = -2x^2$ 의 그래프를 평행이동하여 완전히 포갤 수 있는 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = -2x^2 + 2$

㉡ $y = 2x^2 - 3$

㉢ $y = -2(x+1)^2$

㉣ $y = x^2 + 3x + 3 - 3(x-1)(x+1)$

㉤ $y = \dfrac{6x^2 - 2}{3}$

① ㉠,㉡,㉢　② ㉠,㉡,㉢　③ ㉠,㉢,㉣

④ ㉠,㉢,㉤　⑤ ㉠,㉣,㉤

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프에서 a 의 값이 같으면 평행 이동하여 두 이차 함수의 그래프를 완전히 포갤 수 있다.
따라서 $a = -2$ 인 것은 ㉠,㉢,㉣이다.

12. $y = -x^2 + 2x + 3$ 의 그래프에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하는 x 의 범위는?

① $x > 1$　② $x < 1$　③ $x > 0$

④ $x > -1$　⑤ $x < -1$

해설

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2 + 2x + 3 \\
&= -(x-1)^2 + 4
\end{aligned}
$$

위로 볼록한 모양의 포물선이고 축의 방정식 $x = 1$ 이므로
따라서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하는 x 의 범위는
$\{x \mid x > 1\}$ 이다.

13. 이차함수 $y = 2x^2 + 8x + k - 1$ 의 최솟값이 10 일 때, 그 때의 x 값과 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -2$

▷ 정답 : $k = 19$

해설

$$y = 2x^2 + 8x + k - 1$$
$$= 2(x+2)^2 - 8 + k - 1$$
$$= 2(x+2)^2 + k - 9$$

$x = -2$ 일 때, 최솟값 $k - 9$ 를 가지므로 $k - 9 = 10$

$\therefore\ k = 19$

14. 둘레의 길이가 24 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이를 y 라고 할 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 18 ② 20 ③ 30 ④ 32 ⑤ 36

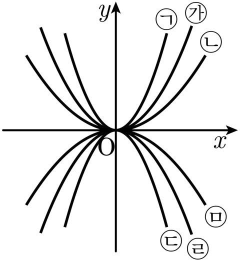
해설

반지름의 길이를 x 라 하면 호의 길이는 $24-2x$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\times x\times(24-2x) \\ &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x+36-36) \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
따라서 꼭짓점이 $(6,36)$ 이므로 반지름의 길이 $x=6$ 일 때, 부채꼴의 넓이 y 가 최댓값 36 을 가진다.

15. 다음 그림은 모두 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이며, x 축을 기준으로 위, 아래에 놓여있는 그래프는 서로 대칭이다. 그 중 ㉮는 $y = x^2$ 의 그래프이다. $-1 < a < 0$ 일 때, $y = ax^2$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것을 찾아 기호로 써라.



▶ 답 :

▷ 정답 : ㉤

해설

$-1 < a < 0$ 이므로 위로 볼록, $|a| < 1$ 이므로 폭은 ㉮ $y = x^2$ 보다 넓은 포물선이다.
따라서 ㉤이다.

16. 이차함수 $y=-x^2+6x+4m-1$ 의 그래프의 꼭짓점이 직선 $-2x+y+6=0$ 의 위에 있을 때, 상수 m 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$y=-x^2+6x+4m-1$ 을 $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴로 바꾸면 $y=-(x-3)^2+8+4m$ 이므로 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 4m+8)$ 이다. 꼭짓점이 직선 $-2x+y+6=0$ 을 지나므로 $-6+4m+8+6=0$, $4m=-8$, $m=-2$ 이다.

17. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 \, (x < 0) \\ 3x^2 \, (x \geq 0) \end{cases}$ 의 그래프 위의 점 P 와 점 A$(2, 0)$ 에 대하여 삼각형 POA 의 넓이가 24 일 때, 점 P 의 x 좌표들의 곱을 구하면?

① $-6\sqrt{3}$　② $-7\sqrt{3}$　③ $-8\sqrt{3}$

④ $-9\sqrt{3}$　⑤ $-10\sqrt{3}$

해설

점 P(a, b) 라고 하면 $b > 0$ 이므로 ($\triangle$POA의 넓이) $= \frac{1}{2} \times 2 \times b =$ 24 이다.

따라서 $b = 24$ 이다.

P$(a, 24)$ 인 a 의 값을 구하면

(i) $a < 0$ 일 때

$y = x^2$ 에 $(a, 24)$ 를 대입하면

$24 = a^2, \ a = -2\sqrt{6}$

(ii) $a \geq 0$ 일 때

$y = 3x^2$ 에 $(a, 24)$ 를 대입하면

$24 = 3a^2, \ a = 2\sqrt{2}$

(i), (ii) 에서 P$(-2\sqrt{6}, 24)$ 또는 P$(2\sqrt{2}, 24)$ 이다.

따라서 점 P 의 x좌표들의 곱은

$-2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = -8\sqrt{3}$ 이다.

18. 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값은?

① $-\frac{7}{8}$ ② -1 ③ $\frac{1}{8}$ ④ 1 ⑤ $-\frac{9}{8}$

해설

$y = x^2 - 4kx + 2k^2 + k - 1 = (x - 2k)^2 - 2k^2 + k - 1$

$m = -2k^2 + k - 1 = -2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{7}{8}$ 이므로 m 의 최댓값은 $-\frac{7}{8}$ 이다.

19. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - q$의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 정수가 되게 하는 30 보다 작은 자연수 q의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 8

▷ 정답 : 18

해설

$y = \frac{1}{2}x^2 - q$와 x 축과의 교점을 A, B라 하고, x 좌표를 구하면

$\frac{1}{2}x^2 - q = 0$에서

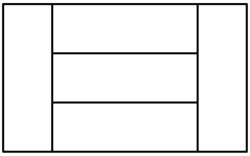
$x = \pm\sqrt{2q}$

따라서 x 축과의 교점은 $\mathrm{A}(-\sqrt{2q},\ 0)$, $\mathrm{B}(\sqrt{2q},\ 0)$

즉, $\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{2q}$ 이고 q는 자연수이므로 $\sqrt{2q}$ 가 정수가 되면 된다.

$\therefore\ q = 2,\ 8,\ 18$

20. 다음 그림에서 직사각형의 변을 제외한 직사각형 내부의 선분의 길이의 총합이 48 이고, 내부의 5 개의 직사각형의 넓이는 모두 같다. 큰 직사각형의 넓이가 최대일 때의 큰 직사각형의 가로의 길이를 y , 세로의 길이를 x 라 할 때, xy 의 값을 구하여라.

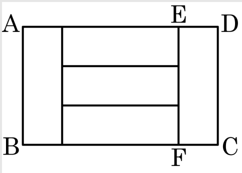


▶ 답 :

▷ 정답 : 240

해설

그림에서



$\square \mathrm{CDEF} = \frac{1}{5} \square \mathrm{ABCD}$ 이므로

$\overline{\mathrm{DE}} = \frac{1}{5}y$

직사각형 내부 선분의 길이의 합이 48 이므로

$2x + \frac{6}{5}y = 48$,

$\therefore\ y = -\frac{5}{3}x + 40$

직사각형 ABCD 의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= xy = x\left(-\frac{5}{3}x + 40\right) \\ &= -\frac{5}{3}(x-12)^2 + 240 \end{aligned}$$

$\therefore\ x = 12$ 일 때, 큰 직사각형의 넓이가 최대가 되므로 $y = \left(-\frac{5}{3}\right) \times 12 + 40 = 20$

따라서 $xy = 240$ 이다.