

1. 양수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 9$ 일 때 abc 의 최댓값은?

① 19

② 21

③ 23

④ 25

⑤ 27

해설

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \text{에서 } 9 \geq 3\sqrt[3]{abc},$$
$$3 \geq \sqrt[3]{abc}, \quad 27 \geq abc$$

2. 양수 x 에 대하여 $\frac{x^2 + 2x + 2}{x}$ 는 $x = a$ 에서 최솟값 b 를 가질 때,
 $-2a + b + 1$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$x > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x} = x + 2 + \frac{2}{x}$$

$$x + \frac{2}{x} + 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

(단, 등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2} + 2$ 이므로 $b = 2\sqrt{2} + 2$

등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립하므로 $a = \sqrt{2}$

$$\text{따라서 } -2a + b + 1 = -2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 2) + 1 = 3$$

3. 양수 x 에 대하여 $8x^2 + \frac{2}{x}$ 의 최솟값은?

① $2\sqrt{3}$

② $2\sqrt[3]{3}$

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$x > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} 8x^2 + \frac{2}{x} &= 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \\ &\geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 성립)

4. a, b, x, y 가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$ 일 때 $ax + by$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16

② -4

③ 0

④ 4

⑤ 16

해설

a, b, x, y 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$$8 \times 2 \geq (ax + by)^2$$

$$\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$$

$$(\text{최댓값}) \times (\text{최솟값}) = -16$$

5. x, y 가 실수이고 $x^2 + y^2 = 10$ 일 때 $x + 3y$ 의 최댓값은?

① 5

② 6

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

x, y 가 실수이므로

코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(1^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$$

이 때, $x^2 + y^2 = 10$ 이므로

$$100 \geq (x + 3y)^2$$

$$\therefore -10 \leq x + 3y \leq 10$$

(단, 등호는 $x = \frac{y}{3}$ 일 때 성립)

따라서 최댓값은 10이다.

6. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족할 때, $x + 2y$ 의 최댓값 M , 최솟값 m 의 합 $M + m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$$(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$$

$$(x + 2y)^2 \leq 5 \cdot 5$$

$$\therefore -5 \leq x + 2y \leq 5 \text{ 이므로}$$

$$x + 2y \text{의 최댓값 } M = 5, \text{ 최솟값 } m = -5$$

$$\therefore M + m = 5 + (-5) = 0$$

7. 세 조건 $p: 4 \leq x \leq 5$, $q: x \leq a$, $r: x \geq b$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 a 의 최솟값을 m 이라 하고, r 이 p 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 b 의 최댓값을 n 이라 할 때, $m+n$ 의 값은?

① -1

② 1

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$p \Rightarrow q$ 이면 $P \subset Q$ 이므로 $a \geq 5$

$\therefore m = 5$

$p \Rightarrow r$ 이면 $P \subset R$ 이므로 $b \leq 4$

$\therefore n = 4$

$\therefore m + n = 9$

8. 두 조건 $a \leq x \leq 5$, $b \leq x \leq 3$ 이 각각 조건 $0 \leq x \leq 4$ 이기 위한 필요조건과 충분조건일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합은?

① -2

② -1

③ 0

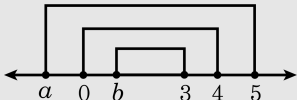
④ 1

⑤ 2

해설

$$0 \leq x \leq 4 \Rightarrow a \leq x \leq 5$$

$$b \leq x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$$



$$\therefore a \leq 0, b \geq 0$$

a 의 최댓값, b 의 최솟값 모두 0이다.

9. $x \geq a$ 가 $-2 \leq x-1 \leq 2$ 이기 위한 필요조건일 때, 상수 a 의 최댓값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$-1 \leq x \leq 3$ 이므로 $a \leq -1$ 이어야 한다.

10. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.



답 :

개



정답 : 211 개

해설

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 이들 중 적어도 하나는 0 이므로, 전체 함수의 개수에서 $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인 함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

11. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 f 가 $x \in A$ 인 모든 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

집합 A 에서 B 로의 함수 f 가

$f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키려면

-1 이 대응할 수 있는 원소는

-2, -1, 0, 1, 2 의 5 가지.

0 이 대응할 수 있는 원소는

$f(-0) = -f(0)$ 에서, $2f(0) = 0$,

즉 0 의 1 가지

1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(-1)$ 의 1 가지

따라서, 함수 f 의 개수는 $5 \times 1 \times 1 = 5$ (개)

12. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 8 개

② 25 개

③ 64 개

④ 81 개

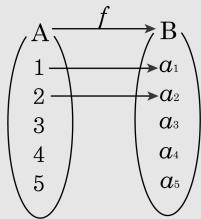
⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수

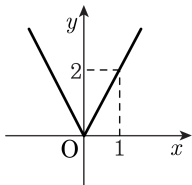
$f : A \rightarrow B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소 3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중 하나를 각각 대응시키면 된다.

따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 = 125$ (개)

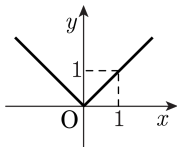


13. 다음 중 함수 $y = x + |x|$ 의 그래프는?

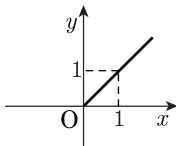
①



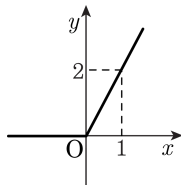
②



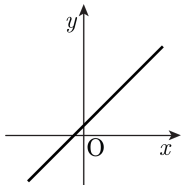
③



④



⑤



해설

$y = x + |x|$ 에서

$x \leq 0$ 일 때 $y = x - x = 0$ 이고

$x > 0$ 일 때 $y = x + x = 2x$ 이다.

따라서 주어진 함수의 그래프는 ④와 같다.

14. 직선 $y = m|x - 1| + 2$ 와 x 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 10 일 때, m 의 값은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{1}{5}$ ④ $-\frac{2}{5}$ ⑤ 1

해설

$$y = m|x - 1| + 2$$

i) $x \geq 1$ 일 때 $y = mx - m + 2 \cdots \textcircled{㉠}$

ii) $x < 1$ 일 때 $y = m - mx + 2 \cdots \textcircled{㉡}$

m 에 관계없이 정점 $(1, 2)$ 을 지난다.

x 절편은 $\textcircled{㉠}$ 에서 $x = \frac{m-2}{m}$

$\textcircled{㉡}$ 에서 $x = \frac{m+2}{m}$

그림에서 $\overline{AB}$ 의 길이는

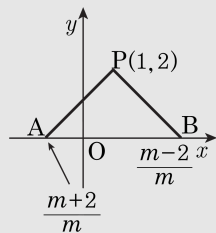
$$\frac{m-2}{m} - \frac{m+2}{m} = -\frac{4}{m}$$

$\therefore \triangle PAB$ 의 면적이 10이므로

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{4}{m}\right) = 10$$

$$10m = -4$$

$$\therefore m = -\frac{2}{5}$$



해설

삼각형의 넓이가 10일 때 높이가 2이므로

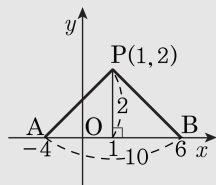
$$\overline{AB} = 10$$

즉 그래프의 x 절편이 -4, 6이다.

$y = m|x - 1| + 2$ 에 $(6, 0)$ 을 대입하면

$$0 = m|6 - 1| + 2, 5m = -2$$

$$\therefore m = -\frac{2}{5}$$



15. 함수 $y = 2|x - 1| - 2$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = 2|x - 1| - 2$$

(i) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x - 1) - 2 = -2x$

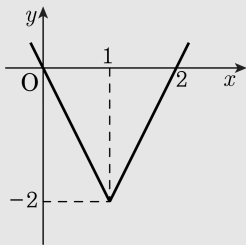
(ii) $x \geq 1$ 일 때, $y = 2(x - 1) - 2 = 2x - 4$

따라서 $y = 2|x - 1| - 2$ 의 그래프와

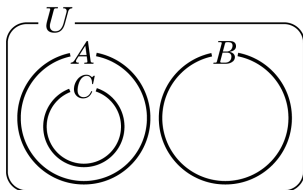
x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

다음 그림에서

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$$



16. 전체집합 U 의 세 부분집합 A, B, C 의 포함 관계가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



① $A - B = B$

② $A \cup B \cup C = U$

③ $(A \cup C) \subset B$

④ $B \cap C = \emptyset$

⑤ $A^c \subset B$

해설

① $A - B = A$

② $A \cup B \cup C = A \cup B$

③ $(A \cup C) \not\subset B$

⑤ $B \subset A^c$

17. 1 부터 어떤 수까지의 자연수 중 k 의 배수를 원소로 하는 집합을 $P_{(k)}$ 라고 정의한다. $n(P_{(3)}) = a$, $n(P_{(4)}) = b$, $n(P_{(12)}) = c$ 라고 할 때, $n((P_{(3)} \cup P_{(6)}) \cup (P_{(2)} \cap P_{(4)}))$ 를 a, b, c 로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b - c$

해설

$n(P_{(3)}) = a$, $n(P_{(4)}) = b$, $n(P_{(12)}) = c$ 라고 할 때

$$\begin{aligned} & n((P_{(3)} \cup P_{(6)}) \cup (P_{(2)} \cap P_{(4)})) \\ &= n(P_3 \cup P_4) \\ &= n(P_3) + n(P_4) - n(P_{12}) \\ &= a + b - c \end{aligned}$$

18. 세 집합 $A = \{x|x\text{는 한국인}\}$, $B = \{x|x\text{는 학생}\}$, $C = \{x|x\text{는 여자}\}$ 에 대하여 한국의 남학생을 나타내는 집합을 모두 고르면?

① $(A \cup B) - C$

② $A \cup B \cup C$

③ $(A \cap B) - C$

④ $A \cap B \cap C^c$

⑤ $(A - B)^c \cap C^c$

해설

한국 학생 중 여학생을 뺀 것 또는 한국 학생 중 여자가 아닌 사람이므로

$(A \cap B) - C$ 또는 $A \cap B \cap C^c$ 이다.