

1. 정수의 집합 Z 에서 Z 로의 함수 f 가 $f(1) = -2$, $f(a+b) = f(a)+f(b)$ 을 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $f(0) = 0$

② $f(-x) = -f(x)$

③ $f(2x) = 2f(x)$

④ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$

⑤ $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

해설

① $f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$ 이므로 $f(0) = 0$

② $f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) = 0$

$\therefore f(-x) = -f(x)$

③ $f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

④, ⑤ $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 이므로

$f(2) = f(1) + f(1) = (-2) + (-2) = (-2) \times 2$

$f(3) = f(2) + f(1) = f(1) + f(1) + f(1) = (-2) \times 3 \dots\dots$

$f(x) = f(1) + f(1) + \dots + f(1) = -2x$

따라서 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$

2. 함수 $f : A \rightarrow B$ 에서 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 이고,
 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 일 때, $\{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 +$
 $\{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 이므로

$B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 에서 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 을 사용하여 $1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 을 만들 수 있는 경우는 더하는 순서에 상관없이 $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}$ 으로 표현된다.

이 때, 정의역 중에서 1, $\sqrt{2}$ 에 대응하는 것은 1개이고 $\sqrt{3}$ 에

대응하는 것은 2개이어야 한다.

따라서 $\{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 + \{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2$

$= 1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 9$

3. 임의의 두 양수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 이고 $f(3) = 1$ 일 때, $f(27)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x = 3, y = 3$ 일 때

$$f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 1 + 1 = 2$$

$x = 9, y = 3$ 일 때

$$f(27) = f(9 \cdot 3) = f(9) + f(3) = 2 + 1 = 3$$

4. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 이라 할 때, 함수 $f : A \rightarrow A$ 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 가지수는?
- ① 2 가지 ② 3 가지 ③ 6 가지
 ④ 8 가지 ⑤ 9 가지

해설

$f(-0) = -f(0)$
 $\therefore f(0) = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $f(-1) = -f(1) \cdots \textcircled{2}$

①, ②을 만족하는 함수 f 는 위의 3 가지뿐이다.

5. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▶ 정답 : 211 개

해설

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 이들 중 적어도 하나는 0 이므로, 전체 함수의 개수에서 $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인 함수의 개수를 빼면 된다. 그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

6. 집합 $X = \{-2, 0, 2\}$, $Y = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ 가 있다. X 에서 Y 로 함수 $f : X \rightarrow Y$ 중에서 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 개수는?

① 2 가지

② 3 가지

③ 4 가지

④ 5 가지

⑤ 6 가지

해설

$f(0) = -f(0)$ 에서 $f(0) = 0$ 이고,

1) $f(-2) = -3$, $f(2) = 3$

2) $f(-2) = -1$, $f(2) = 1$

3) $f(-2) = 0$, $f(2) = 0$

4) $f(-2) = 1$, $f(2) = -1$

5) $f(-2) = 3$, $f(2) = -3$

따라서 5 가지이다.

7. $x = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$, $y = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ 일 때, 식 $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ ② $-\frac{2}{5}\sqrt{5}$ ③ $\frac{4}{5}\sqrt{5}$
④ $-\frac{4}{5}\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

해설

$x = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$, $y = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ 에서

$$\begin{cases} xy = \sqrt{9-5} = 2 \\ x^2 + y^2 = 6 \\ x^2 - y^2 = 2\sqrt{5} \end{cases} \quad \text{를 준식에 대입}$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - y^2} \\ &= \frac{4xy}{x^2 - y^2} = \frac{4 \times 2}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

8. $0 \leq a < 2$ 이고 $x = \frac{4a}{a^2 + 4}$ 일 때
 $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$1+x = 1 + \frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2+4a+4}{a^2+4} = \frac{(a+2)^2}{a^2+4}$$

$$1-x = 1 - \frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2-4a+4}{a^2+4} = \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$$

$a^2+4 > 0$ 이고 $0 < a < 2$ 이므로

$a+2 > 0$, $a-2 < 0$

$$\therefore \sqrt{1+x} = \sqrt{\frac{(a+2)^2}{a^2+4}} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{(a-2)^2}{a^2+4}} = \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} &= \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}} + \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{a^2+4}} \end{aligned}$$

$\therefore a=0$ 일 때 최댓값 2

9. $a > 1$ 이고, $x = \frac{2a}{a^2 + 1}$ 일 때, $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 를 a 로 나타내면?

- ① $\frac{5a}{\sqrt{a^2+1}}$ ② $\frac{4a}{\sqrt{z^2+1}}$ ③ $\frac{2a}{\sqrt{a^2+1}}$
 ④ $\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ ⑤ $\frac{7a}{\sqrt{a^2+1}}$

해설

$$\begin{aligned} x &= \frac{2a}{a^2+1} \text{ 이므로} \\ \sqrt{1+\frac{2a}{a^2+1}} + \sqrt{1-\frac{2a}{a^2+1}} \\ &= \sqrt{\frac{(a+1)^2}{a^2+1}} + \sqrt{\frac{(a-1)^2}{a^2+1}} \\ &= \frac{a+1+a-1}{\sqrt{a^2+1}} (\because a > 1) \\ &= \frac{2a}{\sqrt{a^2+1}} \end{aligned}$$

10. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A) = 32, n(B) = 20, n(C) = 15,$
 $n(A \cap B) = x, n(B \cap C) = 0, n(A \cap C) = 10, n(A - B) = 22$ 일 때,
 $n(A \cup B \cup C)$ 의 값은?

① 41

② 43

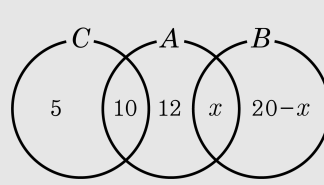
③ 45

④ 47

⑤ 49

해설

벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.
 그러므로 $n(A \cup B \cup C) = 5 +$
 $10 + 12 + x + 20 - x = 47$



11. 1 부터 어떤 수까지의 자연수 중 k 의 배수를 원소로 하는 집합을 $P_{(k)}$ 라고 정의한다. $n(P_{(3)}) = a$, $n(P_{(4)}) = b$, $n(P_{(12)}) = c$ 라고 할 때, $n((P_{(3)} \cup P_{(6)}) \cup (P_{(2)} \cap P_{(4)}))$ 를 a, b, c 로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b - c$

해설

$n(P_{(3)}) = a$, $n(P_{(4)}) = b$, $n(P_{(12)}) = c$ 라고 할 때

$$\begin{aligned} & n((P_{(3)} \cup P_{(6)}) \cup (P_{(2)} \cap P_{(4)})) \\ &= n(P_3 \cup P_4) \\ &= n(P_3) + n(P_4) - n(P_{12}) \\ &= a + b - c \end{aligned}$$

12. 집합 P 에 대하여 $P[x]$ 를
- (1) $x \in P$ 이면 $P[x] = \{-x + 1, 0, x - 1\}$
 - (2) $x \notin P$ 이면 $P[x] = \{1, x, x^2\}$ 이라고 정의한다.
- 두 집합 $A = \{x|x \text{는 소수인 자연수}\}$, $B = \{3x - 1|x \text{는 자연수}\}$ 일 때, 집합 $(A - B)[2] \cup (B - A)[8]$ 의 원소의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = \{x|x \text{는 소수인 자연수}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\}$
 $B = \{3x - 1|x \text{는 자연수}\} = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \dots\}$
 $2 \notin A - B$ 이므로 $(A - B)[2] = \{1, 2, 4\}$ 이고,
 $8 \in B - A$ 이므로 $(B - A)[8] = \{-7, 0, 7\}$ 이다.
따라서
 $(A - B)[2] \cup (B - A)[8] = \{-7, 0, 1, 2, 4, 7\}$ 이고,
원소의 총합은 7이다.

13. $\frac{a+b}{5} = \frac{2b+c}{4} = \frac{c}{3} = \frac{2a+8b-c}{x}$ 에서 x 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 10$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{5} &= \frac{2b+c}{4} = \frac{c}{3} \\ &= \frac{2(a+b) + 3(2b+c) - 4c}{2 \times 5 + 3 \times 4 + (-4) \times 3} \\ &= \frac{2a+8b-c}{10}\end{aligned}$$

$$\therefore x = 10$$

14. $\frac{2b+3c}{a} = \frac{3c+a}{2b} = \frac{a+2b}{3c} = k$ 라 할 때, k 의 값으로 가능한 것을 모두 고르면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

(분모의 합) = $a + 2b + 3c$

i) $a + 2b + 3c = 0$ 일 때

$2b + 3c = -a$, $3c + a = -2b$, $a + 2b = -3c$ 이므로

주어진 식에 각각 대입하면

$$\frac{-a}{a} = \frac{-2b}{2b} = \frac{-3c}{3c} = k$$

$$\therefore k = -1$$

ii) $a + 2b + 3c \neq 0$ 일 때

$$k = \frac{2b+3c}{a} = \frac{3c+a}{2b} = \frac{a+2b}{3c}$$

$$= \frac{2a+4b+6c}{a+2b+3c} \quad (\because \text{가바의 리})$$

$$= \frac{2(a+2b+3c)}{a+2b+3c} = 2$$

i), ii) 에서 $k = -1$ 또는 $k = 2$

15. 다음 등식이 성립할 때, 상수 k 의 값은?

$$\frac{x+2y}{2} = \frac{2y+z}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+8y-z}{k}$$

- ① -1
- ② -5
- ③ -8
- ④ -10
- ⑤ -12

해설

$$\frac{x+2y}{2} = \frac{2y+z}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+8y-z}{k}$$

$$\begin{cases} x+2y = \frac{z}{2} & \cdots \textcircled{1} \\ 2y+z = \frac{3}{4}z & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① - ② 하면

$$x-z = -\frac{1}{4}z, x = \frac{3}{4}z, y = -\frac{1}{8}z$$

$$\frac{x+8y-z}{k} = \frac{\frac{3}{4}z - z - z}{k} = \frac{-\frac{5}{4}z}{k} = \frac{z}{4}$$

$$\therefore k = -5$$

해설

가비의 리에 따라

$$\frac{x+2y}{2} = \frac{6y+3z}{3 \times 3} = \frac{-4z}{4 \times (-4)}$$

$$= \frac{x+8y-z}{2+9-16} = \frac{x+8y-z}{-5}$$

$$\therefore k = -5$$