

1. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

① 9

② 11

③ 13

④ 15

⑤ 17

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \\ &= 3 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \text{에서} \end{aligned}$$

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$$

$$\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 2, \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 2$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3 + 2 + 1 = 6$

2. 양수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 9$ 일 때 abc 의 최댓값은?

① 19

② 21

③ 23

④ 25

⑤ 27

해설

$$a + b + c \geq 3 \sqrt[3]{abc} \text{에서 } 9 \geq 3 \sqrt[3]{abc},$$
$$3 \geq \sqrt[3]{abc}, \quad 27 \geq abc$$

3. x 가 양의 실수 일 때, $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ 의 최솟값과 그 때의 x 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 > 0$, $\frac{1}{x^2} > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

등호는 $x^2 = \frac{1}{x^2}$ 일 때 성립하므로 $x^4 = 1$

따라서 양의 실수 x 는 1이다.

최솟값은 3이고, x 값은 1이다.

4. 집합 $X = \{-2, 0, 2\}$, $Y = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 함수 $f : X \rightarrow Y$ 중에서 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 개수는?

① 2 가지

② 3 가지

③ 4 가지

④ 5 가지

⑤ 6 가지

해설

$f(0) = -f(0)$ 에서 $f(0) = 0$ 이고,

1) $f(-2) = -3, f(2) = 3$

2) $f(-2) = -1, f(2) = 1$

3) $f(-2) = 0, f(2) = 0$

4) $f(-2) = 1, f(2) = -1$

5) $f(-2) = 3, f(2) = -3$

따라서 5 가지이다.

5. 두 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 A 에서 B 로의 함수 f 가 $x \in A$ 인 모든 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시킬 때, 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

집합 A 에서 B 로의 함수 f 가

$f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키려면

-1 이 대응할 수 있는 원소는

-2, -1, 0, 1, 2 의 5 가지.

0 이 대응할 수 있는 원소는

$f(-0) = -f(0)$ 에서, $2f(0) = 0$,

즉 0 의 1 가지

1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(-1)$ 의 1 가지

따라서, 함수 f 의 개수는 $5 \times 1 \times 1 = 5$ (개)

6. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.



답 :

개



정답 : 211 개

해설

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 이들 중 적어도 하나는 0 이므로, 전체 함수의 개수에서 $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인 함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

7. 유리식 $\frac{3c}{a+2b} = \frac{a}{2b+3c} = \frac{2b}{3c+a}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② 2

③ -1

④ -1, $\frac{1}{2}$

⑤ -1, 2

해설

$$\frac{3c}{a+2b} = \frac{a}{2b+3c} = \frac{2b}{3c+a} = k$$

$$\begin{cases} (a+2b)k = 3c \cdots ① \\ (2b+3c)k = a \cdots ② \\ (3c+a)k = 2b \cdots ③ \end{cases}$$

① + ② + ③ : $2(a+2b+3c)k = (a+2b+3c)$

i) $(a+2b+3c) \neq 0, 2k = 1$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

ii) $(a+2b+3c) = 0$

$a+2b = -3c \rightarrow$ ① 식에 대입

$$-3c \cdot k = 3c$$

$$\therefore k = -1$$

$$\therefore k = -1, \frac{1}{2}$$

8. $\frac{x+2y}{3} = \frac{3y+z}{4} = \frac{z}{2} = \frac{2x+10y-2z}{A}$ 일 때, A 의 값은 ?

① 9

② 7

③ 6

④ 8

⑤ 5

해설

가비의 리에 의해서

$$\begin{aligned}\text{준식} &= \frac{2(x+2y) + 2 \cdot (3y+z) - 4z}{2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 4 \cdot 2} \\ &= \frac{2x + 10y - 2z}{6}\end{aligned}$$

$$\therefore A = 6$$

9. 유리식 $\frac{b+3c}{2a} = \frac{3c+2a}{b} = \frac{2a+b}{3c} = k$ 일 때, k 의 값을 구하면? (단, $abc \neq 0$)

- ① 2 또는 -1 ② 0 또는 -1 ③ -1 또는 -1
 ④ 2 또는 3 ⑤ -2 또는 -1

해설

$$\frac{b+3c}{2a} = \frac{3c+2a}{b} = \frac{2a+b}{3c} = k$$

$$\frac{b+3c}{2a} = k, \frac{3c+2a}{b} = k, \frac{2a+b}{3c} = k$$

각각 정리하면

$$b+3c = 2ak \cdots ①$$

$$3c+2a = bk \cdots ②$$

$$2a+b = 3ck \cdots ③$$

$$① + ② + ③ : 2(b+3c+2a) = k(2a+b+3c)$$

$$\Rightarrow k = 2 \text{ 또는 } 2a+b+3c = 0$$

$2a+b+3c = 0$ 인 경우,

$$① \text{에 대입해 보면 } -2a = 2ak, k = -1$$

$$\therefore k = 2, -1$$