

1. 집합 $X = \{-2, 0, 2\}$, $Y = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ 가 있다. X 에서 Y 로 함수 $f : X \rightarrow Y$ 중에서 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 개수는?

① 2 가지

② 3 가지

③ 4 가지

④ 5 가지

⑤ 6 가지

해설

$f(0) = -f(0)$ 에서 $f(0) = 0$ 이고,

1) $f(-2) = -3$, $f(2) = 3$

2) $f(-2) = -1$, $f(2) = 1$

3) $f(-2) = 0$, $f(2) = 0$

4) $f(-2) = 1$, $f(2) = -1$

5) $f(-2) = 3$, $f(2) = -3$

따라서 5 가지이다.

2. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▶ 정답 : 211 개

해설

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 이들 중 적어도 하나는 0 이므로, 전체 함수의 개수에서 $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인 함수의 개수를 빼면 된다. 그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

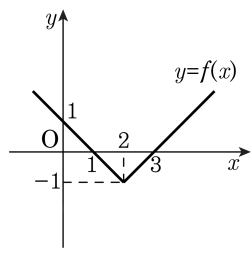
3. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1) = a, f(2) = b$ 인 f 의 개수는?

- ① 4 개 ② 6 개 ③ 8 개 ④ 12 개 ⑤ 16 개

해설

$f(1) = a, f(2) = b$ 이므로 $f : A \rightarrow B$ 가 일대일 대응이라면
 $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 3 개,
 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 제외한 2 개,
 $f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 제외한 1 개이다.
따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 개

4. 함수 $f(x) = |x - 2| - 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?



보기

- ㉠ $f(0) = 0$
- ㉡ $f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
- ㉢ $f(x) < 0$ 이면 $1 < x < 3$
- ㉤ $a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉡, ㉤

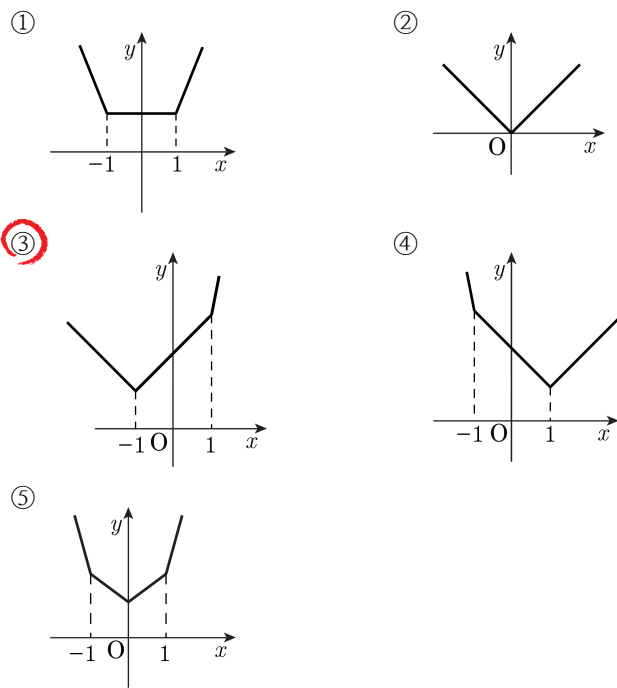
④ ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

- ㉠ $f(0) = 1$
 - ㉡ $f(1) = 0, f(3) = 0$ 이므로
 $f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
 - ㉢ $f(x) < 0$ 이면 그래프가
 x 축의 아래에 있는 구간이므로 $1 < x < 3$
 - ㉤ $x < 2$ 는 그래프가 감소하는 구간이므로,
 $a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$
- 따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢, ㉤이다.

5. 다음 중 함수 $y = |x - 1| + x + |x + 1|$ 의 그래프는?



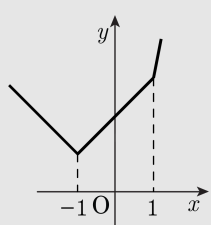
해설

i) $x \leq -1$ 일 때, $y = |x - 1| + x + |x + 1|$
 $= -(x - 1) + x - (x + 1)$
 $= -x$

ii) $-1 < x \leq 1$ 일 때 $y = |x - 1| + x + |x + 1|$
 $= -(x - 1) + x + (x + 1)$
 $= x + 2$

iii) $1 < x$ 일 때 $y = |x - 1| + x + |x + 1|$
 $= (x - 1) + x + (x + 1)$
 $= 3x$

i), ii), iii) 에 의하여 주어진 함수의 그래프는



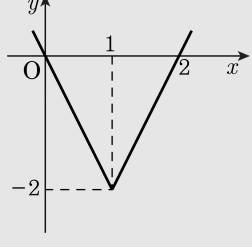
6. 함수 $y = 2|x - 1| - 2$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = 2|x - 1| - 2$
(i) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x - 1) - 2 = -2x$
(ii) $x \geq 1$ 일 때, $y = 2(x - 1) - 2 = 2x - 4$
따라서 $y = 2|x - 1| - 2$ 의 그래프와
 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
다음 그림에서
 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$



7. $2 + \frac{1}{k + \frac{1}{m + \frac{1}{5}}} = \frac{803}{371}$ 일 때, 자연수 k, m 의 값에 대하여 $k + m$ 의

값은?

- ① 6 ② 12 ③ 18 ④ 24 ⑤ 30

해설

$$\begin{aligned} \frac{803}{371} &= 2 + \frac{61}{371} = 2 + \frac{1}{\frac{371}{61}} = 2 + \frac{1}{6 + \frac{5}{61}} \\ &= 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\frac{61}{5}}} = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{12 + \frac{1}{5}}} \end{aligned}$$

따라서 $k = 6, m = 12$

$\therefore k + m = 18$

8. 모든 양의 유리수는 다음과 같이 유한 개의 양의 정수 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 을 이용하여 분자가 1인 분수의 꼴로 나타낼수 있다.

$$x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{x_{n-1} + \frac{1}{x_n}}}}}}$$

이를테면, $\frac{3}{4}$ 은 $\frac{3}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$ 와 같이 나타낼 수 있다. 다음 □안에

들어갈 숫자들을 모두 더한 것은?

$$\frac{17}{7} = 2 + \frac{3}{7} = 2 + \frac{1}{\square + \frac{1}{\square}}$$

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\frac{17}{7} = 2 + \frac{3}{7} = 2 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$$

∴ 2 + 3 = 5

9. $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} = \frac{25}{9}$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하면?

① 5

② 7

③ 8

④ 16

⑤ 34

해설

$$\begin{aligned} \frac{25}{9} &= 2 + \frac{7}{9} = 2 + \frac{1}{\frac{9}{7}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{7}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2, b = 1, c = 3, d = 2$$

$$\therefore a + b + c + d = 8$$

10. 다음 등식 $x = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \cdots}}}$ 을 만족하는 x 값을 간단히 한 것은?

- ① $\frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$ ② $\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ ③ 1.5
 ④ $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{7})$ ⑤ $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

해설

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \cdots}}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} + x} \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{3}{2} + x \\ \Rightarrow x^2 - x - \frac{3}{2} &= 0 \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \\ x &= \frac{1 + \sqrt{7}}{2} (\because x > 0) \end{aligned}$$

11. $x = \sqrt{10 + 8\sqrt{3 + \sqrt{8}}}$ 일 때 $x^2 - 8x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{10 + 8\sqrt{3 + \sqrt{8}}} \\&= \sqrt{10 + 8\sqrt{(2+1) + 2\sqrt{2} \cdot 1}} \\&= \sqrt{10 + 8(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{18 + 8\sqrt{2}} \\&= \sqrt{18 + 2\sqrt{32}} = \sqrt{(16+2) + 2\sqrt{16 \cdot 2}} \\&= \sqrt{16} + \sqrt{2} = 4 + \sqrt{2} \\\therefore x - 4 &= \sqrt{2} \\\text{양변을 제곱하면 } (x-4)^2 &= (\sqrt{2})^2 \\x^2 - 8x + 16 &= 2 \\\therefore x^2 - 8x &= -14\end{aligned}$$

12. $a > 1$ 이고, $x = \frac{2a}{a^2 + 1}$ 일 때, $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 를 a 로 나타내면?

① $\frac{5a}{\sqrt{a^2 + 1}}$

② $\frac{4a}{\sqrt{a^2 + 1}}$

③ $\frac{2a}{\sqrt{a^2 + 1}}$

④ $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$

⑤ $\frac{7a}{\sqrt{a^2 + 1}}$

해설

$$x = \frac{2a}{a^2 + 1} \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{1 + \frac{2a}{a^2 + 1}} + \sqrt{1 - \frac{2a}{a^2 + 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+1)^2}{a^2 + 1}} + \sqrt{\frac{(a-1)^2}{a^2 + 1}}$$

$$= \frac{a+1+a-1}{\sqrt{a^2 + 1}} (\because a > 1)$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

13. $f(x)$ 는 유리수를 계수로 하는 x 의 다항식이고, $f(x) = x^2 + ax + b$,
 $f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$ 일 때, $a - b$ 의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ 0 ⑤ 3

해설

$$\sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{4+3+2\sqrt{4 \times 3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\therefore f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = f(2 + \sqrt{3})$$

$$= (2 + \sqrt{3})^2 + a(2 + \sqrt{3}) + b$$

$$= (7 + 2a + b) + (4 + a)\sqrt{3} = 0$$

그런데, $7 + 2a + b$, $4 + a$ 는 유리수이므로 무리수의 상등에 관한 정리에서

$$7 + 2a + b = 0, \quad 4 + a = 0 \quad \therefore a = -4, \quad b = 1$$

$$\therefore a - b = -4 - 1 = -5$$

해설

$f(\sqrt{7+2\sqrt{12}}) = 0$ 이므로 $\sqrt{7+2\sqrt{12}} = 2 + \sqrt{3}$ 은 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이고, a, b 가 유리수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

두 근의 합 $4 = -a$, 두 근의 곱 $1 = b$

$$\therefore a - b = -4 - 1 = -5$$

14. m 이 유리수일 때, $\frac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3}$ 가 유리수가 되도록 하는 m 의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3} = \frac{(m-5+2\sqrt{2})(-3-\sqrt{2}m)}{(-3+\sqrt{2}m)(-3-\sqrt{2}m)}$$

$$= \frac{-7m+15}{9-2m^2} - \frac{m^2-5m+6}{9-2m^2} \cdot \sqrt{2}$$

가 유리수이므로

$$\frac{m^2-5m+6}{9-2m^2} = 0$$

$$\therefore m^2-5m+6=0 \quad \therefore m=2, 3$$

15. 다음 등식을 만족하는 유리수 x, y 의 값을 구하면?

$$x(\sqrt{2}-3)+y(\sqrt{2}+2)=3\sqrt{2}-4$$

① $x=2, y=-1$

② $x=-1, y=-2$

③ $x=2, y=1$

④ $x=-1, y=2$

⑤ $x=1, y=2$

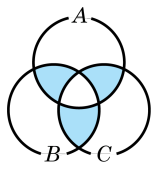
해설

$$(-3x+2y)+(x+y)\sqrt{2}=-4+3\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} -3x+2y=-4 \\ x+y=3 \end{cases}$$

$$\therefore x=2, y=1$$

16. 1에서 100까지의 자연수 중에서 $A = \{x \mid x \text{는 } 2\text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 3\text{의 배수}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 } 5\text{의 배수}\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램에 색칠된 부분에 속하는 원소의 개수를 구하여라.

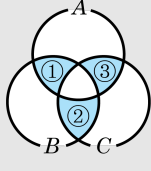


▶ 답 : 23개

▷ 정답 : 23개

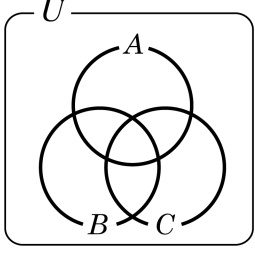
해설

색칠된 부분 ①, ②, ③의 원소의 개수를 a, b, c 라 하면 $a = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) \cdots \textcircled{1}$,
 $b = n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) \cdots \textcircled{2}$,
 $c = n(C \cap A) - n(A \cap B \cap C) \cdots \textcircled{3}$



$A \cap B = \{x \mid x \text{는 } 6\text{의 배수}\} \therefore n(A \cap B) = 16$,
 $B \cap C = \{x \mid x \text{는 } 15\text{의 배수}\} \therefore n(B \cap C) = 6$
 $C \cap A = \{x \mid x \text{는 } 10\text{의 배수}\} \therefore n(C \cap A) = 10$
 $A \cap B \cap C = \{x \mid x \text{는 } 30\text{의 배수}\} \therefore n(A \cap B \cap C) = 3$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에 의해
 $a + b + c$
 $= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3 \times n(A \cap B \cap C)$
 $= 16 + 6 + 10 - 9 = 23$

17. 집합 A, B, C 가 전체집합 U 의 부분집합으로서 다음 그림과 같이 주어졌다. 두 집합 P, Q 에 대하여 $P \circ Q$ 를 $P \circ Q = (P - Q) \cup (Q - P^c)$ 와 같이 정의할 때, $A \circ A$ 의 값을 구하면?



- ① A ② B ③ C ④ $\emptyset$ ⑤ $A - B$

해설

$P \circ Q = (P - Q) \cup (Q - P^c)$ 이므로
 $A \circ A = (A - A) \cup (A - A^c) = \emptyset \cup A = A$ 이다.

18. 집합 P 에 대하여 $P[x]$ 를
- (1) $x \in P$ 이면 $P[x] = \{-x, 0, x\}$
- (2) $x \notin P$ 이면 $P[x] = \left\{\frac{3}{x}, 1, \frac{x}{3}\right\}$ 이라고 정의한다.
- 두 집합 $A = \{x|x\text{는 }2\text{의 배수}\}$, $B = \{x|x\text{는 }3\text{의 배수}\}$ 일 때, $n((A - B)[2] \cup (B - A)[6])$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A = \{x|x \text{ 는 } 2 \text{ 의 배수}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots\}$
,
 $B = \{x|x \text{ 는 } 3 \text{ 의 배수}\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots\}$,
 $2 \in A - B$ 이므로 $(A - B)[2] = \{-2, 0, 2\}$ 이고,
 $6 \notin B - A$ 이므로 $(B - A)[6] = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ 이다.
따라서 $(A - B)[2] \cup (B - A)[6] = \left\{-2, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$ 이고 $n((A - B)[2] \cup (B - A)[6]) = 5$

19. $\frac{2b+c}{3a} = \frac{c+3a}{2b} = \frac{3a+2b}{c}$ 의 값을 구하면?

① 1, 2

② 1, -2

③ -1, -2

④ -1, 2

⑤ 1

해설

(i) $3a + 2b + c \neq 0$ 일 때,
가비의 리에서

$$\frac{(2b+c) + (c+3a) + (3a+2b)}{3a+2b+c} = 2$$

(ii) $3a + 2b + c = 0$ 일 때, $2b + c = -3a$

$$\therefore \frac{-3a}{3a} = -1$$

20. $\frac{a+b}{5} = \frac{2b+c}{4} = \frac{c}{3} = \frac{2a+8b-c}{x}$ 에서 x 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 10$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{5} &= \frac{2b+c}{4} = \frac{c}{3} \\ &= \frac{2(a+b) + 3(2b+c) - 4c}{2 \times 5 + 3 \times 4 + (-4) \times 3} \\ &= \frac{2a+8b-c}{10}\end{aligned}$$

$$\therefore x = 10$$

21. 다음 등식이 성립할 때, 상수 k 의 값은?

$$\frac{x+2y}{2} = \frac{2y+z}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+8y-z}{k}$$

- ① -1
- ② -5
- ③ -8
- ④ -10
- ⑤ -12

해설

$$\frac{x+2y}{2} = \frac{2y+z}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+8y-z}{k}$$

$$\begin{cases} x+2y = \frac{z}{2} & \cdots \textcircled{1} \\ 2y+z = \frac{3}{4}z & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① - ② 하면

$$x-z = -\frac{1}{4}z, x = \frac{3}{4}z, y = -\frac{1}{8}z$$

$$\frac{x+8y-z}{k} = \frac{\frac{3}{4}z - z - z}{k} = \frac{-\frac{5}{4}z}{k} = \frac{z}{4}$$

$$\therefore k = -5$$

해설

가비의 리에 따라

$$\frac{x+2y}{2} = \frac{6y+3z}{3 \times 3} = \frac{-4z}{4 \times (-4)}$$

$$= \frac{x+8y-z}{2+9-16} = \frac{x+8y-z}{-5}$$

$$\therefore k = -5$$