1. 집합 $X = \{-2, 0, 2\}$, $Y = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$가 있다. X에서 Y로의 함수 $f : X \to Y$ 중에서 $f(-x) = -f(x)$를 만족하는 함수 f의 개수는?

① 2 가지 ② 3 가지 ③ 4 가지

④ 5 가지 ⑤ 6 가지

해설

$f(0) = -f(0)$에서 $f(0) = 0$ 이고,

1) $f(-2) = -3, \quad f(2) = 3$

2) $f(-2) = -1, \quad f(2) = 1$

3) $f(-2) = 0, \quad f(2) = 0$

4) $f(-2) = 1, \quad f(2) = -1$

5) $f(-2) = 3, \quad f(2) = -3$

따라서 5 가지이다.

2. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 함수 $f:A\to B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5)=0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 211 개

해설

$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$ 이들 중
적어도 하나는 0 이므로,
전체 함수의 개수에서
$f(1)f(2)f(3)f(4)f(5)\neq 0$ 인
함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5-2^5=211$

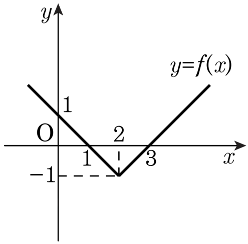
3. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에서 집합 $B=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1)=a,\ f(2)=b$ 인 f 의 개수는?

① 4 개 ② 6 개 ③ 8 개 ④ 12 개 ⑤ 16 개

해설

$f(1)=a,\ f(2)=b$ 이므로 $f : A \to B$ 가 일대일 대응이려면
$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2)$ 의 값을 제외한 3 개,
$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2),\ f(3)$ 의 값을 제외한 2 개,
$f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4)$ 의 값을 제외한 1 개이다.
따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3\times2\times1=6$ 개

4. 함수 $f(x) = |x-2|-1$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고른 것은 무엇인가?



보기

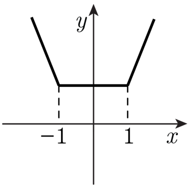
㉠ $f(0) = 0$
㉡ $f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
㉢ $f(x) < 0$ 이면 $1 < x < 3$
㉣ $a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$

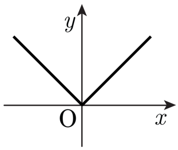
① ㉠ , ㉡　② ㉠, ㉡, ㉢　③ ㉠, ㉡, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

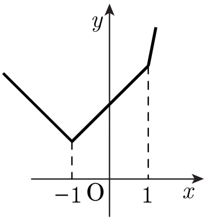
해설

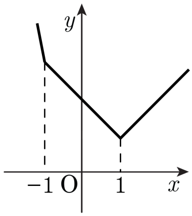
㉠ $f(0) = 1$
㉡ $f(1) = 0,\ f(3) = 0$ 이므로
$f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
㉢ $f(x) < 0$ 이면 그래프가
x 축의 아래에 있는 구간이므로 $1 < x < 3$
㉣ $x < 2$ 는 그래프가 감소하는 구간이므로,
$a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢, ㉣이다.

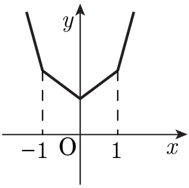
5. 다음 중 함수 $y = |x-1| + x + |x+1|$의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


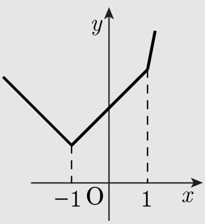
해설

i) $x \le -1$ 일 때, $y = |x-1| + x + |x+1|$
$= -(x-1) + x - (x+1)$
$= -x$

ii) $-1 < x \le 1$ 일 때 $y = |x-1| + x + |x+1|$
$= -(x-1) + x + (x+1)$
$= x + 2$

iii) $1 < x$ 일 때 $y = |x-1| + x + |x+1|$
$= (x-1) + x + (x+1)$
$= 3x$

i), ii), iii) 에 의하여 주어진 함수의 그래프는



6. 함수 $y = 2|x-1|-2$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

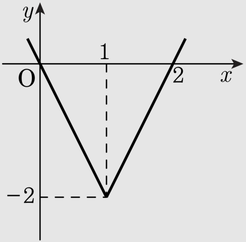
$y = 2|x-1|-2$

(i) $x < 1$ 일 때, $y = -2(x-1)-2 = -2x$

(ii) $x \geq 1$ 일 때, $y = 2(x-1)-2 = 2x-4$

따라서 $y = 2|x-1|-2$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 다음 그림에서

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$



7. $2+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}}=\dfrac{803}{371}$ 일 때, 자연수 k, m의 값에 대하여 $k+m$의 값은?

① 6　　② 12　　③ 18　　④ 24　　⑤ 30

해설

$$\frac{803}{371}=2+\frac{61}{371}=2+\cfrac{1}{\cfrac{371}{61}}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{5}{61}}$$

$$=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{\cfrac{61}{5}}}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{5}}}$$

따라서 $k=6,\ m=12$

$\therefore\ k+m=18$

8. 모든 양의 유리수는 다음과 같이 유한 개의 양의 정수 $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$ 을 이용하여 분자가 1인 분수의 꼴로 나타낼수 있다.

$$x_0+\cfrac{1}{x_1+\cfrac{1}{x_2+\cfrac{1}{x_3+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{\ddots\, \ddots\, x_{n-1}+\cfrac{1}{x_n}}}}}}$$

이를테면, $\frac{3}{4}$은 $\frac{3}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}$ 와 같이 나타낼 수 있다. 다음 □안에 들어갈 숫자들을 <u>모두</u> 더한 것은?

$$\frac{17}{7}=2+\frac{3}{7}=2+\cfrac{1}{\square+\cfrac{1}{\square}}$$

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\frac{17}{7}=2+\frac{3}{7}=2+\cfrac{1}{\cfrac{7}{3}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}$$

$\therefore 2+3=5$

9. $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{25}{9}$ 일 때, $a+b+c+d$의 값을 구하면?

① 5　　② 7　　③ 8　　④ 16　　⑤ 34

해설

$$\frac{25}{9}=2+\frac{7}{9}=2+\cfrac{1}{\cfrac{9}{7}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{7}}$$

$$=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{7}{2}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}$$

$\therefore\ a=2,\ b=1,\ c=3,\ d=2$

$\therefore\ a+b+c+d=8$

10. 다음 등식 $x = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \cdots}}}}$ 을 만족하는 x 값을 간단히 한 것은?

① $\dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$ ② $\dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ③ 1.5

④ $\dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{7}\right)$ ⑤ $\dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$

해설

$$x = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \cdots}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2} + x}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} + x$$

$$\Rightarrow x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{7}}{2} (\because x > 0)$$

11. $x = \sqrt{10 + 8\sqrt{3 + \sqrt{8}}}$일 때 $x^2 - 8x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$$x = \sqrt{10 + 8\sqrt{3 + \sqrt{8}}}$$
$$= \sqrt{10 + 8\sqrt{(2+1) + 2\sqrt{2 \cdot 1}}}$$
$$= \sqrt{10 + 8(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{18 + 8\sqrt{2}}$$
$$= \sqrt{18 + 2\sqrt{32}} = \sqrt{(16+2) + 2\sqrt{16 \cdot 2}}$$
$$= \sqrt{16} + \sqrt{2} = 4 + \sqrt{2}$$

$\therefore\ x - 4 = \sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $(x-4)^2 = (\sqrt{2})^2$

$x^2 - 8x + 16 = 2$

$\therefore\ x^2 - 8x = -14$

12. $a > 1$이고, $x = \dfrac{2a}{a^2+1}$일 때, $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$를 a로 나타내면?

① $\dfrac{5a}{\sqrt{a^2+1}}$ ② $\dfrac{4a}{\sqrt{z^2+1}}$ ③ $\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+1}}$

④ $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ ⑤ $\dfrac{7a}{\sqrt{a^2+1}}$

해설

$x = \dfrac{2a}{a^2+1}$ 이므로

$$\sqrt{1+\frac{2a}{a^2+1}} + \sqrt{1-\frac{2a}{a^2+1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+1)^2}{a^2+1}} + \sqrt{\frac{(a-1)^2}{a^2+1}}$$

$$= \frac{a+1+a-1}{\sqrt{a^2+1}} (\because a > 1)$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{a^2+1}}$$

13. $f(x)$는 유리수를 계수로 하는 x의 다항식이고, $f(x)=x^2+ax+b$, $f(\sqrt{7+2\sqrt{12}})=0$일 때, $a-b$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ 0 ⑤ 3

해설

$\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{4+3+2\sqrt{4\times3}}=2+\sqrt{3}$

$\therefore\ f(\sqrt{7+2\sqrt{12}})=f(2+\sqrt{3})$

$=(2+\sqrt{3})^2+a(2+\sqrt{3})+b$

$=(7+2a+b)+(4+a)\sqrt{3}=0$

그런데, $7+2a+b,\ 4+a$는 유리수이므로 무리수의 상등에 관한 정리에서

$7+2a+b=0,\ 4+a=0\quad\therefore\ a=-4,\ b=1$

$\therefore\ a-b=-4-1=-5$

해설

$f(\sqrt{7+2\sqrt{12}})=0$이므로 $\sqrt{7+2\sqrt{12}}=2+\sqrt{3}$은 $x^2+ax+b=0$의 한 근이고, $a,\ b$가 유리수이므로 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

두 근의 합 $4=-a$, 두 근의 곱 $1=b$

$\therefore\ a-b=-4-1=-5$

14. m이 유리수일 때, $\dfrac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3}$가 유리수가 되도록 하는 m의 값의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{2\sqrt{2}+m-5}{\sqrt{2}m-3}=\frac{(m-5+2\sqrt{2})(-3-\sqrt{2}m)}{(-3+\sqrt{2}m)(-3-\sqrt{2}m)}$$

$$=\frac{-7m+15}{9-2m^2}-\frac{m^2-5m+6}{9-2m^2}\cdot\sqrt{2}$$

가 유리수이므로

$$\frac{m^2-5m+6}{9-2m^2}=0$$

$\therefore\ m^2-5m+6=0 \quad \therefore\ m=2,\ 3$

15. 다음 등식을 만족하는 유리수 x, y의 값을 구하면?

$$x(\sqrt{2}-3)+y(\sqrt{2}+2)=3\sqrt{2}-4$$

① $x=2,\ y=-1$
② $x=-1,\ y=-2$
③ $x=2,\ y=1$
④ $x=-1,\ y=2$
⑤ $x=1,\ y=2$

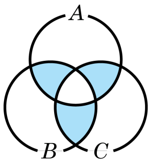
해설

$(-3x+2y)+(x+y)\sqrt{2}=-4+3\sqrt{2}$

$$\begin{cases} -3x+2y=-4 \\ x+y=3 \end{cases}$$

$\therefore\ x=2,\quad y=1$

16. 1 에서 100 까지의 자연수 중에서 $A = \{x \mid x\text{는 } 2\text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x\text{는 } 3\text{의 배수}\}$, $C = \{x \mid x\text{는 } 5\text{의 배수}\}$ 일 때, 다음 벤 다이어그램에 색칠된 부분에 속하는 원소의 개수를 구하여라.

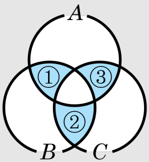


▶ 답 : 개

▷ 정답 : 23 개

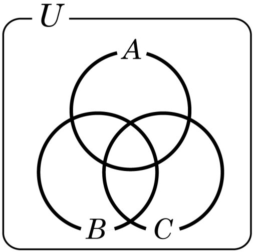
해설

색칠된 부분 ①, ②, ③ 의 원소의 개수를 a, b, c 라 하면 $a = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) \cdots$ ㉠,
$b = n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) \cdots$ ㉡,
$c = n(C \cap A) - n(A \cap B \cap C) \cdots$ ㉢



$A \cap B = \{x \mid x\text{는 } 6\text{의 배수}\}$ $\therefore n(A \cap B) = 16$,
$B \cap C = \{x \mid x\text{는 } 15\text{의 배수}\}$ $\therefore n(B \cap C) = 6$
$C \cap A = \{x \mid x\text{는 } 10\text{의 배수}\}$ $\therefore n(C \cap A) = 10$
$A \cap B \cap C = \{x \mid x\text{는 } 30\text{의 배수}\}$ $\therefore n(A \cap B \cap C) = 3$
㉠, ㉡, ㉢ 에 의해
$a + b + c$
$= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3 \times n(A \cap B \cap C)$
$= 16 + 6 + 10 - 9 = 23$

17. 집합 A, B, C 가 전체집합 U 의 부분집합으로서 다음 그림과 같이 주어졌다. 두 집합 P, Q 에 대하여 $P \bigcirc Q$ 를 $P \bigcirc Q = (P - Q) \cup (Q - P^c)$ 와 같이 정의할 때, $A \bigcirc A$ 의 값을 구하면?



① A ② B ③ C ④ $\varnothing$ ⑤ $A - B$

해설

$P \bigcirc Q = (P - Q) \cup (Q - P^c)$ 이므로
$A \bigcirc A = (A - A) \cup (A - A^c) = \varnothing \cup A = A$ 이다.

18. 집합 P 에 대하여 $P[x]$ 를

(1) $x \in P$ 이면 $P[x] = \{-x,\ 0,\ x\}$

(2) $x \notin P$ 이면 $P[x] = \left\{\frac{3}{x},\ 1,\ \frac{x}{3}\right\}$ 이라고 정의한다.

두 집합 $A = \{x|x$는 2의 배수$\}$, $B = \{x|x$는 3의 배수$\}$ 일 때, $n((A - B)[2] \cup (B - A)[6])$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A = \{x|x$ 는 2 의 배수$\} = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ \cdots\}$
,
$B = \{x|x$ 는 3 의 배수$\} = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ \cdots\}$,
$2 \in A - B$ 이므로 $(A - B)[2] = \{-2,\ 0,\ 2\}$ 이고,
$6 \notin B - A$ 이므로 $(B - A)[6] = \left\{\frac{1}{2},\ 1,\ 2\right\}$ 이다.
따라서 $(A - B)[2] \cup (B - A)[6] = \left\{-2,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2\right\}$ 이고 $n((A - B)[2] \cup (B - A)[6]) = 5$

19. $\dfrac{2b+c}{3a}=\dfrac{c+3a}{2b}=\dfrac{3a+2b}{c}$ 의 값을 구하면?

① 1, 2　　② 1, -2　　③ -1, -2

④ -1, 2　　⑤ 1

해설

(i) $3a+2b+c\neq 0$일 때,

가비의 리에서

$$\frac{(2b+c)+(c+3a)+(3a+2b)}{3a+2b+c}=2$$

(ii) $3a+2b+c=0$일 때, $2b+c=-3a$

$$\therefore \frac{-3a}{3a}=-1$$

20. $\dfrac{a+b}{5}=\dfrac{2b+c}{4}=\dfrac{c}{3}=\dfrac{2a+8b-c}{x}$에서 x의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=10$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{5}&=\frac{2b+c}{4}=\frac{c}{3}\\&=\frac{2(a+b)+3(2b+c)-4c}{2\times5+3\times4+(-4)\times3}\\&=\frac{2a+8b-c}{10}\end{aligned}$$

$\therefore x=10$

21. 다음 등식이 성립할 때, 상수 k의 값은?

$$\frac{x+2y}{2}=\frac{2y+z}{3}=\frac{z}{4}=\frac{x+8y-z}{k}$$

① -1 ② -5 ③ -8 ④ -10 ⑤ -12

해설

$$\frac{x+2y}{2}=\frac{2y+z}{3}=\frac{z}{4}=\frac{x+8y-z}{k}$$

$$\begin{cases} x+2y=\frac{z}{2} & \cdots ① \\ 2y+z=\frac{3}{4}z & \cdots ② \end{cases}$$

① − ②하면

$$x-z=-\frac{1}{4}z,\ x=\frac{3}{4}z,\ y=-\frac{1}{8}z$$

$$\frac{x+8y-z}{k}=\frac{\frac{3}{4}z-z-z}{k}=\frac{-\frac{5}{4}z}{k}=\frac{z}{4}$$

$\therefore k=-5$

해설

가비의 리에 따라

$$\frac{x+2y}{2}=\frac{6y+3z}{3\times3}=\frac{-4z}{4\times(-4)}$$

$$=\frac{x+8y-z}{2+9-16}=\frac{x+8y-z}{-5}$$

$\therefore\ k=-5$