

1. $x \geq a$ 가 $-1 < x < 1$ 의 필요조건이 되기 위한 a 의 최댓값을 구하면 ?

① -1

② $-\frac{1}{2}$

③ -2

④ $-\frac{3}{2}$

⑤ -5

해설

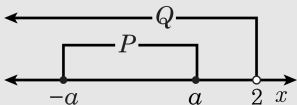
$\{x | -1 < x < 1\} \subset \{x | x \geq a\}$ 이어야 하므로 $a \leq -1$
따라서, a 의 최댓값은 -1 이다.

2. $|x| \leq a$ 가 $2x - 5 < x - 3$ 이 되기 위한 충분조건이 되도록 실수 a 의 범위를 정하면?

- ① $a < 2$ ② $a > 2$ ③ $a \leq 2$ ④ $a < 1$ ⑤ $a > 4$

해설

$P = \{x | -a \leq x \leq a\}$, $Q = \{x | 2x - 5 < x - 3\} = \{x | x < 2\}$
 에서 $P \subset Q$ 가 되도록 a 값의 범위를 결정한다. P, Q 를 문제의 조건을 만족시키도록 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



(주의 : $a \neq 2 \because P \subset Q$) $\therefore a < 2$

3. 두 조건 $p : x > a$, $q : -3 \leq x \leq 1$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건일 때, 정수 a 의 최댓값을 구하면?

- ① -4 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때,
 p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \rightarrow p$,
즉, $Q \subset P$ 가 성립한다.

$P = \{x \mid x > a\}$, $Q = \{x \mid -3 \leq x \leq 1\}$ 이므로 $a < -3$
 $\therefore$ 정수 a 의 최댓값은 -4 이다.

4. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow B$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답: 211개

해설

$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 이들 중 적어도 하나는 0 이므로, 전체 함수의 개수에서 $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인 함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$

5. 집합 $X = \{-2, 0, 2\}$, $Y = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ 가 있다. X 에서 Y 로의 함수 $f : X \rightarrow Y$ 중에서 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족하는 함수 f 의 개수는?

① 2 가지

② 3 가지

③ 4 가지

④ 5 가지

⑤ 6 가지

해설

$f(0) = -f(0)$ 에서 $f(0) = 0$ 이고,

1) $f(-2) = -3, f(2) = 3$

2) $f(-2) = -1, f(2) = 1$

3) $f(-2) = 0, f(2) = 0$

4) $f(-2) = 1, f(2) = -1$

5) $f(-2) = 3, f(2) = -3$

따라서 5 가지이다.

6. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 함수 f 가 $f : X \rightarrow X$ 라 할 때, $\{f(-1) + 1\} \{f(1) - 1\} \neq 0$ 을 만족하는 함수 f 의 개수를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$f(-1) \neq -1, f(1) \neq 1$ 이므로
 X 의 원소 $-1, 0, 1$ 에 대응할 수 있는 경우의 수가
각각 2, 3, 2 가지이다.
 $\therefore 2 \times 3 \times 2 = 12$

해설

함수 f 의 개수는 모두 27 개이다.
i) $f(-1) = -1$ 인 함수의 개수는 9 개
ii) $f(1) = 1$ 인 함수의 개수는 9 개
iii) $f(-1) = -1, f(1) = 1$ 인 함수의 개수는 3 개
 $\therefore 27 - (9 + 9 - 3) = 12$

7. 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a > 0, b > 0$ 이면 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

② 모든 실수 a, b 에 대하여 $|a| + |b| > a + b$

③ 모든 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 > ab$

④ 모든 실수 a, b 대하여 $|a - b| \leq |a| - |b|$

⑤ $a > b > 0$ 일 때, $\sqrt{a-b} < \sqrt{a} - \sqrt{b}$

해설

① : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$, 양변을 제곱하면

$$a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{ab} > 0 \text{ (참)}$$

② ④ ⑤ : 모두 양변을 제곱하여 정리해 본다.

③ : (반례) $a = 0, b = 0$

8. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a - b| > |a| - |b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \leq 0$

② $ab \geq 0$

③ $a + b \geq 0$

④ $ab < 0$

⑤ $a - b > 0$

해설

$|a - b| > ||a| - |b||$ 에 대하여

$$(a - b)^2 - (||a| - |b||)^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$$

$$= -2ab + 2|a||b| > 0 \text{ 이려면}$$

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

9. $a > 0$ 일 때, $x = \sqrt{a^2 + 1}$ 과 $y = a + \frac{1}{2a}$ 의 대소를 비교한 것으로 옳은 것은?

- ① $x \leq y$ ② $x < y$ ③ $x \geq y$ ④ $x > y$ ⑤ $x = y$

해설

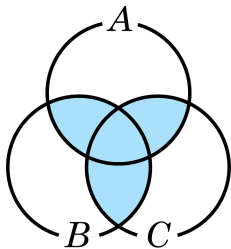
$$x^2 = a^2 + 1$$

$$y^2 = \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 = a^2 + 1 + \frac{1}{4a^2},$$

$$\frac{1}{4a^2} > 0 \text{ 이므로 } y^2 > x^2$$

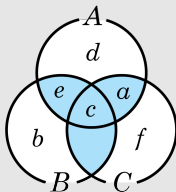
$$\therefore y > x$$

10. 다음 그림에서 세 집합 $A = \{a, c, d, e\}$, $B = \{b, c, e\}$, $C = \{a, c, f\}$ 일 때, 색칠한 부분의 집합은?



- ① $\{a\}$ ② $\{a, b\}$ ③ $\{a, c, e\}$
④ $\{a, c, d, e\}$ ⑤ $\{a, c, d, e, f\}$

해설



따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 $\{a, c, e\}$ 이다.

11. 세 집합 P, Q, R 에 대하여 $n(P) = 19$, $n(Q \cap R) = 7$, $n(P \cap Q \cap R) = 3$ 일 때, $n(P \cup (Q \cap R))$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

해설

$$\begin{aligned} & n(P \cup (Q \cap R)) \\ &= n(P) + n(Q \cap R) - n(P \cap Q \cap R) \\ &= 19 + 7 - 3 = 23 \end{aligned}$$

12. 전체 집합의 세 부분집합 $A = \{x|x\text{는 } 6\text{의 약수}\}$, $B = \{x|x\text{는 } 15\text{의 약수}\}$, $C = \{x|x\text{는 } 16\text{의 약수}\}$ 에 대하여 $n((A - B) \cup (A - C) \cup (B - C))$ 를 구하면?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{1, 3, 5, 15\}, C = \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

$$A - B = \{2, 6\}, B - C = \{3, 5, 15\}, A - C = \{3, 6\}$$

$$\therefore (A - B) \cup (A - C) \cup (B - C) = \{2, 6\} \cup \{3, 6\} \cup \{3, 5, 15\} = \{2, 3, 5, 6, 15\}$$

$$\text{따라서 } n((A - B) \cup (A - C) \cup (B - C)) = 5$$